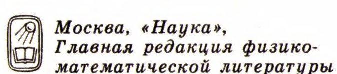
Квант

Выходит с января 1970 года

3 1989

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

В прошлом году наши читатели могли познакомиться со статьей известного физика-теоретика, специалиста по физике твердого тела, профессора М. И. Каганова, которая называлась «Много или мало? Рассуждения физика-теоретика о числах» (см. «Квант» № 1, 1988). Сегодня мы предлагаем читателям статью М. И. Каганова, которую можно, в каком-то смысле, считать продолжением предыдущей и которую можно было бы назвать «Размышления физика-теоретика о смысле чисел в физике». Как и первая, эта статья написана в системе единиц СГСЭ (сантиметр — грамм — секунда, а Э — от «электричества»). Профессиональные физики обычно пользуются именно ею (а не знакомой школьникам СИ). В этой системе некоторые формулы выглядят не совсем так, как в привычной для нашего читателя СИ.

ВЗГЛЯНУВ НА ТЕРМОМЕТР...

Доктор физико-математических наук
М. И. КАГАНОВ

Однажды утром я почувствовал, что в квартире холоднее, чем обычно. Взглянув на термометр, увидел: действительно, вместо привычных 20 °С было 19 °С. Посетовав на нестабильность коммунальных служб, собрался и пошел на работу. В метро мысль вернулась к показанию термометра, и возникло ощущение, что что-то тут не так...

Температура — мера теплового движения молекул. Средняя энергия теплового движения молекулы (скажем, газа в воздухе, наполняющем комнату) равна $\frac{3}{2}kT$, где $k\approx 1{,}4\times\times 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана, а температуру, правда, надо измерять не в градусах Цельсия, а по абсолютной шкале — шкале Кельвина, сдвинутой относительно шкалы Цельсия на —273,16°. Другими словами, температура в моей квартире была около 300 К. И я *почувствовал* изменение температуры ΔT порядка $\frac{1}{300}T$, т. е. ощутил, что энергия теплового движения молекул изменилась на 0,3 %! Более того, без каких-либо сложных приборов, с помощью простого настенного термометра я проверил свое ощущение —*измерил* факт изменения на 0,3 % энергии теплового движения молекул... У меня даже мелькнула гордая мысль об эволюции, создавшей столь чувствительные механизмы ощущения температуры. Хорошо известно, каким важным параметром для живых организмов является температура: изменение температуры тела человека на 1 градус — признак болезни, а интервал допустимого изменения температуры тела — менее 10 градусов. Естественно, ощущать температуру живому организму необходимо очень точно... Но каким образом?

Подсказкой мне послужил все тот же настенный термометр. Поэтому разберемся сначала с ним. Как нам удается измерить изменение температуры на 1 градус? а медицинским термометром — на 0,1 градуса? Измерителем служит изменение объема жидкости (для определенности — ртути). При повышении или понижении температуры ее объем V изменяется на ΔV, причем

$$\frac{\Delta V}{V}=\alpha\cdot\Delta T.$$

Множитель α носит название коэффициента теплового расширения. По порядку величины он составляет 10^{-3}—10^{-4} К$^{-1}$. «Увидеть» $\Delta V/V\sim\sim 10^{-4}$ удается только с помощью простого приема — «загнав» ртуть в тонкий капилляр. Тогда $\Delta V=s\cdot\Delta l$, где s — площадь сечения капилляра, а

$$\Delta l=\frac{V}{s}\,\alpha\cdot\Delta T$$

— изменение высоты столбика ртути. Сделав s достаточно малым, можно добиться необходимого разрешения. Капилляр служит *усилителем*. Если $V\sim 1$ см^3, то для того, чтобы при $\alpha\cdot\Delta T\sim 10^{-4}$ получить $\Delta l\sim 1$ мм$=$ $=0{,}1$ см, надо иметь капилляр с пло-

щадью сечения $s=10^{-3}$ см^2. Очень простой усилитель!

Разобравшись с термометром, перейдем к живому организму. Что в нем служит усилителем? Определяющая роль температуры в жизненно важных процессах связана с тем, что скорости W большинства химических реакций (без которых жизнь была бы невозможна) зависят от температуры очень резко — по экспоненциальному закону:

$$W \sim e^{-U/kT}.$$

Величина U, носящая название энергии активации, для каждой реакции своя, но, как правило, U значительно превышает kT. Не слишком углубляясь и не заглядывая в справочники, я рассуждал так. Химические реакции — это всегда перестройка электронных состояний. Например, соединение атомов Na и Cl в молекулу NaCl происходит так: атом Na отдает электрон атому Cl. Ионы Na^+ и Cl^- притягиваются друг к другу и создают молекулу NaCl, но электроны в молекуле NaCl распределены вокруг ядер не так, как в атомах Na и Cl. Для измерения энергии электронов в атоме создана специальная шкала энергий — электрон-вольт, а 1 эВ$=1{,}6\cdot 10^{-12}$ эрг. Так вот, характерное значение энергии активации U порядка 1 эВ.

Относительное изменение скорости химической реакции $\Delta W/W$ при изменении температуры T на величину ΔT таково*):

$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{U}{kT}\,\frac{\Delta T}{T}.$$

При $\Delta T/T \approx 1/300$ относительное изменение скорости химической реакции $\Delta W/W \approx 1/10$, т. е. вполне ощутимо. Усилителем служит множитель U/kT. Судя по нашим ощущениям, он «работает» очень надежно. По-видимому, это связано с тем, что в организме протекает очень много различных химических реакций и все они (должны быть!) тщательно согласованы...

Итак, вроде бы я понял и успокоился... Однако появилась новая мысль. Пока я не разобрался (конечно, очень приближенно и поверхностно) в механизмах усиления, я удивлялся тому, что могу почувствовать и предельно просто измерить относительное изменение тепловой энергии молекулы, приблизительно равное 1/300. Но ведь в действительности речь идет об изменении энергии не одной молекулы, а всех молекул. Отношение $\Delta T/T$ равно относительному изменению энергии газа, если его температура изменилась на величину ΔT. Новая мысль формулировалась так: каково *абсолютное* значение изменения энергии газа при изменении его температуры на градус? Я, конечно, понимал, что ответить на этот вопрос очень легко — механический эквивалент тепла известен. Но мне хотелось получить эмоционально окрашенный ответ, чтобы почувствовать, много это или мало. И тогда я решил подсчитать, какую массу можно поднять, скажем, на высоту $h=1$ м за счет энергии, требующейся для нагревания воздуха на



*) $W(T+\Delta T)$ пропорционально

$$e^{-\frac{U}{k(T+\Delta T)}} = e^{-\frac{U}{kT(1+\Delta T/T)}} \approx e^{-\frac{U}{kT}\left(1-\frac{\Delta T}{T}\right)},$$

поэтому

$$W(T+\Delta T) = W(T)\cdot e^{\frac{U}{kT}\frac{\Delta T}{T}} \approx W(T)\left(1+\frac{U}{kT}\frac{\Delta T}{T}\right),$$

если $U\cdot\Delta T/kT^2 \ll 1$. Выписывая приближенные равенства, я предполагаю у читателя умение обращаться с малыми величинами.

1 градус в хорошо изолированном помещении размером 4 м $\times$ 5 м $\times$ $\times$ 5 м = 100 м^3. Приближенный расчет очень прост. Энергия газа

$$E=\frac{3}{2}NkT,$$

где N — число частиц газа, а изменение энергии —

$$\Delta E=\frac{3}{2}Nk\cdot\Delta T.$$

Число частиц газа в помещении определить несложно. Каждый моль газа при нормальных условиях занимает объем $V_0=22{,}4$ л $=22{,}4\times10^{-3}$ м^3; значит в помещении содержится $100/(22{,}4\cdot10^{-3})\approx5\times10^3$ молей. А число молекул в каждом моле (число Авогадро) — $N_A\approx6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$. Значит в помещении $N\approx3\cdot10^{27}$ молекул, и $\Delta E\approx6\times10^{11}$ эрг. Теперь вычислим искомую массу по формуле $\Delta E=Mgh$: $M\approx6\times10^6$ г, или 6 тонн(!). Ответ заставил меня трижды проверить расчет. Поверив в правильность ответа, я вспомнил и обычно не затрагивающие сознание призывы с телеэкрана беречь тепло, и недавно услышанное в научно-популярном фильме «Жизнь на Земле» утверждение, что бóльшую часть потребляемой пищи теплокровные животные тратят на поддержание в теле постоянной температуры. Тепло — дорогое удовольствие!

Примечание

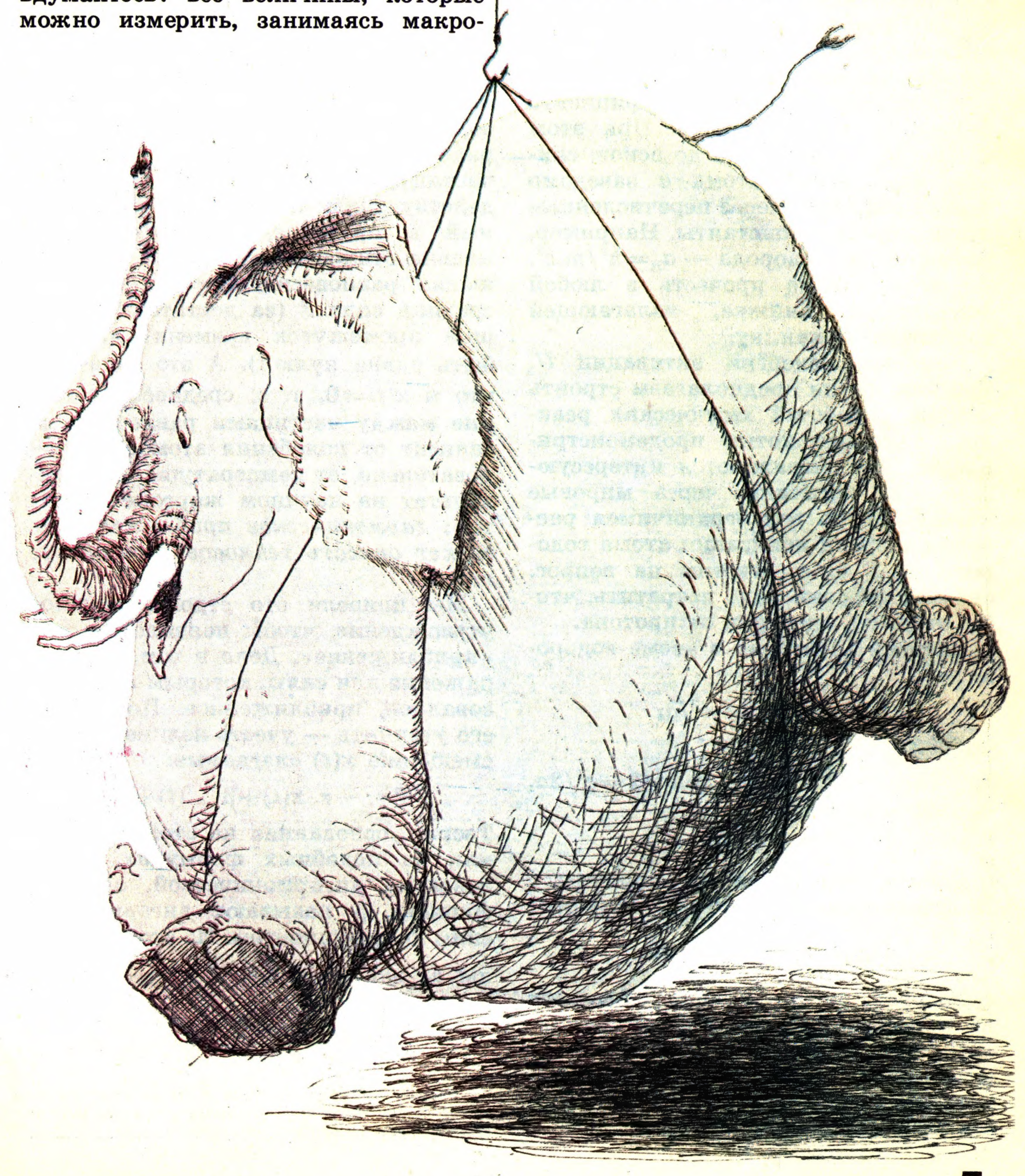
То, что вы прочли до этого момента, можно считать слегка организованным при написании потоком сознания: думал, прикидывал, практически все выкладки производил в уме. Написав и перечитав, я подумал: школьников, как мне кажется, часто отпугивает от физики ощущение того, что она (физика) — набор разнообразных, на первый взгляд не связанных фактов, величин, соотношений. А я «вывалил» на них еще несколько. И мне захотелось довести до сознания читателей еще одну важную, на мой взгляд, мысль.

Современная физика так глубоко проникла в суть вещей, что она может оценить, а во многих случаях и точно вычислить по сути бесконечное число разнообразных параметров, постоянных, всего того, что входило в науку на разных этапах ее развития (часто в виде величин, добытых из опыта). При этом для расчетов достаточно



использовать всего несколько значений физических величин, носящих высокое имя мировых констант. Это заряд электрона $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ, массы электрона и протона $m_e \approx 10^{-27}$ г и $m_p \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г, постоянная Планка $h \approx 6{,}6 \times 10^{-27}$ эрг·с (физики, как правило, постоянной Планка называют величину $\hbar = h/2\pi \approx 10^{-27}$ эрг·с), скорость света $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Только вдумайтесь: все величины, которые можно измерить, занимаясь макроскопической физикой*), в принципе могут быть выражены через пять мировых констант! Такие расчеты получили даже специальное название — расчеты из первых принципов. Конечно, отнюдь не всегда теория столь

*) Ограничение макроскопической физикой не случайно. Например, мы не умеем пока вычислять массы элементарных частиц — разнообразных мезонов, адронов и т. д. (см. книгу Л. Б. Окуня «αβγ...Z», выпущенную издательством «Наука» в 1985 году в серии «Библиотечка «Квант»).



детально разработана, что подобный расчет с необходимой точностью удается довести до конца (поэтому мы и говорим «в принципе»). Но совершенно ясно, что расчет возможен и нет никаких оснований ожидать, что мы столкнемся с принципиально неразрешимой задачей.

Все упомянутые в этой заметке физические величины, значения которых автор либо помнил, либо брал из справочника, могут быть получены как результат расчета из первых принципов. Мы попробуем это показать на примере двух величин: энергии активации U и коэффициенте теплового расширения α. При этом мы не будем доходить до основ, считая, что размер атома a заведомо можно выразить через перечисленные выше мировые константы. Например, размер атома водорода — $a_H = \hbar^2/m_e e^2$. Об этом можно прочесть в любой популярной книжке, излагающей квантовую механику.

Начнем с энергии активации U. Так как мы не предполагаем строить теорию скоростей химических реакций, а только хотим продемонстрировать, как выражаются интересующие нас величины через мировые константы, то мы ограничимся расчетом энергии ионизации атома водорода $U_{ион}$, т. е. ответим на вопрос, сколько энергии надо потратить, чтобы оторвать электрон от протона.

Энергия электрона в атоме водорода —

$$E = m_e v^2/2 - e^2/a,$$

но

$m_e v^2/a = e^2/a^2$, т. е. $m_e v^2/2 = e^2/2a$, и, следовательно,

$$E = -e^2/2a$$

(надеюсь, эти равенства понятны?). Подставив значение $a = a_н$, получим:

$$U_{ион} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \approx 13{,}6 \text{ эВ}.$$

Энергия, которую надо затратить на перестройку электронных состояний, как правило, меньше $U_{ион}$. Поэтому мы при оценке относительного изменения скорости химических реакций приняли $U \sim 1$ эВ.

Расчет коэффициента теплового расширения сложнее. Он требует знания строения того тела, которое испытывает расширение. Нам придется ограничиться простейшим подходом, учитывающим главное — то, что тепловое расширение — результат зависимости среднего равновесного расстояния между частицами от температуры.

Итак, две частицы в теле находятся на расстоянии $d + x(t)$ друг от друга, причем d — расстояние между ними, когда эти частицы покоятся (при абсолютном нуле температуры), а $x(t)$ — это мгновенное (в момент времени t) отклонение частицы от положения равновесия. Сила F, действующая на частицу, напоминает упругую силу, действующую на грузик, привязанный к пружине,— она пропорциональна отклонению частицы от положения равновесия: $F = -\varkappa \cdot x(t)$. Но средняя сила $\bar{F}$ (за достаточно большой промежуток времени) должна быть равна нулю*). А это означает, что и $\overline{x(t)} = 0$, т. е. среднее расстояние между частицами равно d и не зависит от колебания атомов и, следовательно, от температуры. Этот результат на научном жаргоне звучит так: *гармоническое приближение не может описать тепловое расширение тел.*

Мы привели это строгое научное утверждение, чтобы появилось слово «приближение». Дело в том, что выражение для силы, которым мы пользовались, приближенное. Попробуем его уточнить — учесть нелинейные по смещению $x(t)$ слагаемые:

$$F = -\varkappa \cdot x(t) + \beta \cdot x^2(t) + \ldots$$

Теория, основанная на этой формуле или на подобных формулах, носит название ангармонической, а коэффициент β называют ангармоническим коэффициентом. Из этой формулы следует, что $\bar{x} = \frac{\beta}{\varkappa}\overline{x^2}$, т. е.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(d+\bar{x})^3 - d^3}{d^3} \approx \frac{3\bar{x}}{d} = \frac{3\beta}{d\varkappa}\overline{x^2}$$

*) Если бы средняя сила $\bar{F}$ была отлична от нуля, то частицы тела должны были бы под ее воздействием куда-то перемещаться.

(коэффициент 3 появился из-за того, что тело может расширяться по трем направлениям). В этой формуле V — объем тела при $T=0$ К. Итак, чтобы закончить расчет, мы должны уметь вычислять величины β, $\varkappa$ и $x^2(t)$. Начнем с последнего. Так как ангармоническое слагаемое βx^2 — малая поправка (ее пришлось включить в выражение для силы только потому, что без нее ответ оказался равным нулю), то можно считать, что потенциальная энергия движения есть $\varkappa \cdot x^2(t)/2$, а полная энергия равна

$$\mathscr{E}=\frac{M(x')^2}{2}+\frac{\varkappa x^2}{2}.$$

Но в среднем кинетическая $(M(x')^2/2)$ и потенциальная $(\varkappa x^2/2)$ энергии равны. Поэтому

$$\bar{x}^2=\frac{1}{\varkappa}\bar{\mathscr{E}}.$$

А средняя энергия колебательного движения есть kT *). Итак,

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3\beta}{d\varkappa^2}kT.$$

Осталось научиться вычислять множитель $3\beta/\varkappa^2$. Конечно, именно это — самая сложная часть задачи. Но и ее мы предельно упростим (хотя даже при таком способе изложения вам придется в одном месте попросту поверить автору).

Пусть мы имеем дело с ионами, заряды которых $+e$ и $-e$ и расстояние между которыми r. Между ионами действует сила электростатического притяжения, равная e^2/r^2. Но эта сила не может быть единственной — под действием такой силы ионы упали бы друг на друга. Когда они слишком близко приближаются друг к другу, они отталкиваются, причем закон отталкивания может быть выяснен с помощью уравнений квантовой механики.

И здесь мы подошли к тому месту, где читателю придется довериться автору. Сила взаимодействия между ионами —

$$F=\frac{e^2}{r^2}-\frac{A}{r^{10}}.$$

При $r=d$ сила должна быть равна нулю. Поэтому $A=d^8e^2$, и окончательно

$$F=\frac{e^2}{r^2}-\frac{e^2d^8}{r^{10}}.$$

Подставив сюда $r=d+x$, разложим F по степеням x, ограничившись двумя первыми слагаемыми. Коэффициент при x дает нам значение величины $\varkappa$, а при x^2 — значение β. Проделайте, пожалуйста, эти вычисления самостоятельно, и вы убедитесь, что

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3\cdot 52}{64}\frac{kdT}{e^2}, \text{т. е.}\quad \alpha=\frac{3\cdot 52}{64}\frac{kd}{e^2}.$$

Расстояние между атомами d приблизительно равно размеру атома — $d\approx a\approx 3\cdot 10^{-8}$ см $=3$ Å,— и подставляя значения k, e и d, получим

$$\alpha\approx 5\cdot 10^{-5}\ \text{град}^{-1}.$$

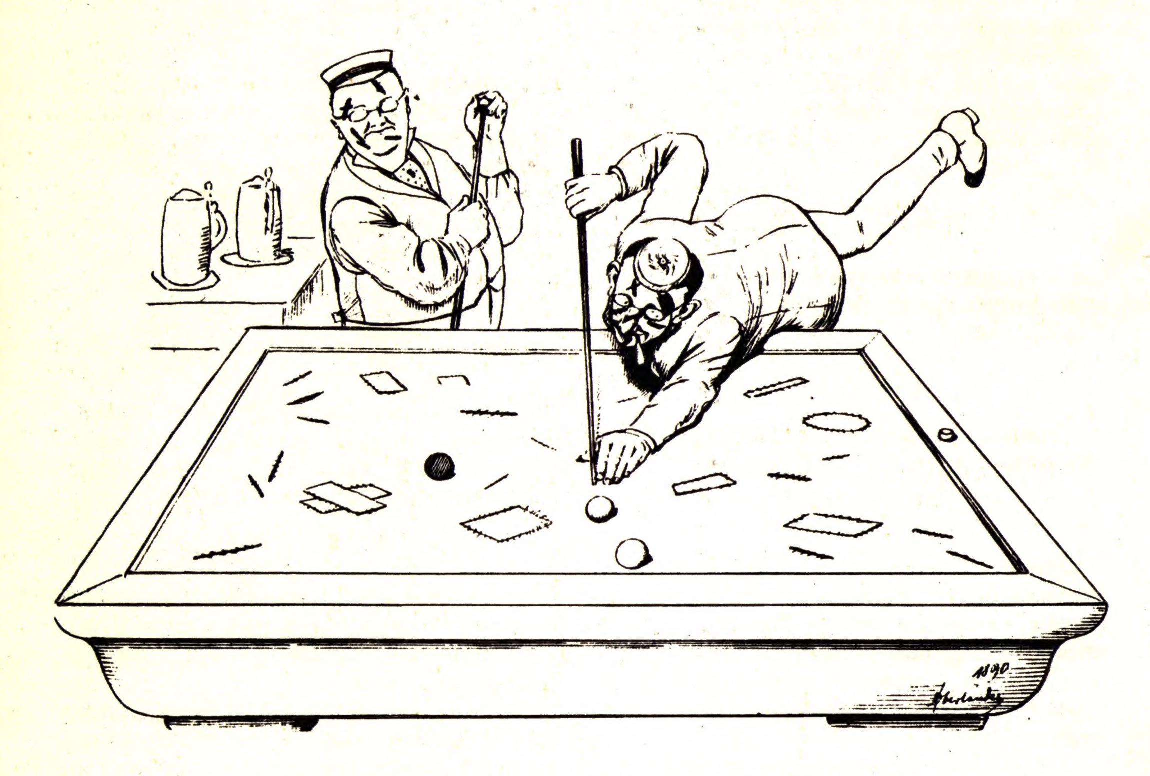
Посмотрите таблицы, и вы убедитесь, что полученная нами (при столь упрощенном рассмотрении) оценка совсем неплоха.

Ну вот, это, пожалуй, уже совсем все. Отметим только, что порядок величины коэффициента теплового расширения α мы могли бы и угадать. Взгляните на последнюю формулу для $\Delta V/V$. Из нее видно, что *безразмерное* отношение $\Delta V/V$ приблизительно равно отношению тепловой энергии (в расчете на одну частицу) kT к энергии связи между частицами (здесь $\sim e^2/d$). Отсюда вывод: чем более сильно связаны молекулы в теле, тем меньше у них коэффициент теплового расширения. Эту закономерность легко усмотреть из таблиц, в которых наряду со значениями α приведены температуры плавления для твердых тел или температуры кипения для жидкостей. Но, конечно, подобное утверждение не есть закон природы. Из него возможны исключения...

*) Сравните с энергией $^3/_2kT$ для частицы в газе: частица свободна, т. е. потенциальная энергия ее равна нулю, поэтому на каждую степень свободы «приходится» $^1/_2kT$, а не kT. Степеней свободы три. Но три степени свободы мы уже учли.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ БИЛЬЯРДНОГО ШАРА

Кандидат физико-математических наук
Г. А. ГАЛЬПЕРИН,
доктор физико-математических наук
А. М. СТЕПИН



Читатель, по-видимому, хорошо знаком с бильярдной игрой. Игра эта, родиной которой считается Китай, имеет многовековую историю. Первые известия о появлении бильярда в Европе относятся к XVI веку. Сохранилось свидетельство о том, что французский король Карл IX в Варфоломеевскую ночь 24 августа 1572 года играл на бильярде, когда со стороны парижского собора Сен-Жермен д 'Акселеруа раздался условный звон колоколов, призывающий католиков к истреблению гугенотов. Тридцать пять лет спустя У. Шекспир в трагедии «Антоний и Клеопатра» заставляет египетскую царицу Клеопатру играть на бильярде со своим придворным. В 1760 году английский король Георг II издал указ, запрещающий бильярдную игру в общественных местах под страхом штрафа в 10 фунтов. В России бильярд известен со времен Петра I.

Подобно тому, как игра в кости вызвала к жизни «исчисление вероятностей», бильярдная игра послужила источником серьезных научных исследований по механике и математике.

В математических исследованиях реальный бильярд заменяют его моделью, носящей название «математический бильярд» — рисунок 1. Если граница бильярдного стола имеет угловые точки, то рассматривают толь-

---

В заставке к статье использован рисунок А. Оберландера.

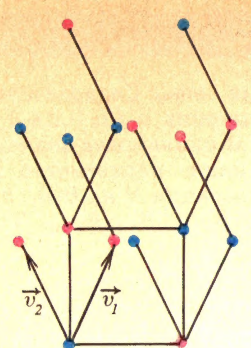


Рис. 2.

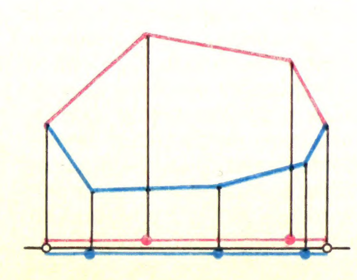
Теперь рассмотрим лес M_1, состоящий из одной елки и десяти берез на расстоянии 1 км от нее. Для него отношение $n/k=0{,}1$. Построим по M_1 описанным способом лес M_2, по лесу M_2 — лес M_3 и т. д. Для леса M_{11} это отношение будет равно $0{,}1+10\cdot 0{,}1=1{,}1>1$, и условие Мюнхгаузена выполняется. Правда, этот лес состоит из 10^{11} берез и $11\cdot 10^{10}$ елок, что многовато даже для легендарного барона. Однако имеется другой пример, подтверждающий, что барон никогда не лжет.

Пусть лес F_1 состоит из двух елок и двух берез, расположенных в диаметрально противоположных вершинах квадрата. Рассмотрим последовательность F_1, F_2, ..., в которой лес F_{k+1} является объединением леса F_k и леса F'_k, полученного из F_k переносом на некоторый вектор $\vec{v}_k$ «общего положения» (исключающего пересечения) длиной 1 км и заменой елок на березы и наоборот (рис. 2). Очевидно, лес F_9, состоящий из $2^9=512$ елок и такого же числа берез, удовлетворяет условию Мюнхгаузена. Применяя к нему конструкцию, описанную в начале решения, получим вполне реальный лес из $21\cdot 512=10\,752$ деревьев, также удовлетворяющий этому условию, для которого отношение числа елок к числу берез равно $1{,}1>1$.

Ф. Л. Назаров

М1130. *На плоскости дан выпуклый n-угольник, у которого длина k-й стороны равна a_k, а длина проекции многоугольника на прямую, содержащую эту сторону, равна d_k ($k=1, 2, ..., n$). Докажите неравенство*

$$2<\frac{a_1}{d_1}+...+\frac{a_n}{d_n}\leqslant 4.$$


Рис. 1.

Очевидно, что *длина проекции выпуклого многоугольника на любую прямую ровно вдвое меньше суммы длин проекций его сторон на эту же прямую* (рис. 1), и, следовательно, меньше половины его периметра p. Поэтому

$$\frac{a_1}{d_1}+...+\frac{a_n}{d_n}>\frac{2a_1}{p}+...+\frac{2a_n}{p}=2\cdot\frac{a_1+...+a_n}{p}=2.$$

Улучшить эту оценку нельзя, как показывает пример «сплюснутого» многоугольника, у которого $d_i=p/2$ при всех i.

Для доказательства верхней оценки построим некоторый вспомогательный многоугольник. Отложим от одной точки n пар противоположных векторов, каждый из которых равен по длине и параллелен одной из сторон данного n-угольника M, и занумеруем эти векторы по часовой стрелке: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_{2n}$ (рис. 2); очевидно, $\vec{v}_i=-\vec{v}_{i+n}$, $i=1, 2, ..., n$. От конца B_1 вектора $\vec{v}_1$ отложим вектор $\overrightarrow{B_1B_2}=\vec{v}_2$, от его конца B_2 — вектор $\overrightarrow{B_2B_3}=\vec{v}_3$ и т. д. (рис. 3). Последняя точка B_{2n} совпадает с началом $\vec{v}_1$. Легко видеть, что полученный $2n$-угольник $N=B_1B_2...B_{2n}$ выпуклый, имеет центр симметрии O и каждые две его противоположные стороны равны и параллельны одной из сторон многоугольника M. В силу приведенного в начале решения утверждения длина проекции N на любую прямую равна сумме длин проекций векторов $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ на эту прямую, т. е. вдвое

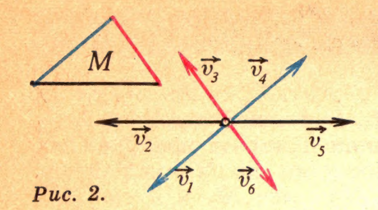


Рис. 2.

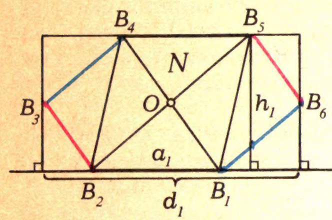


Рис. 3.

больше длины проекции M на нее. Следовательно, рассматриваемое в задаче выражение $a_1/d_1+...+a_n/d_n$ имеет для многоугольников N и M одинаковое значение. Поэтому достаточно доказать наше неравенство для N. Пусть $a_1=B_1B_2$, d_1 — длина проекции N на B_1B_2, h_1 — расстояние между прямыми B_1B_2 и $B_{n+1}B_{n+2}$. Тогда (см. рис. 3 для $n=3$)

$$\frac{a_1}{d_1}=\frac{a_1h_1}{d_1h_1}\leqslant\frac{S(B_1B_2B_{n+1}B_{n+2})}{S(N)}=\frac{4S(OB_1B_2)}{S(N)},$$

где S обозначает площадь. Точно так же получаем, что

$$\frac{a_1}{d_1}+...+\frac{a_n}{d_n}\leqslant 4\cdot\frac{S(OB_1B_2)+S(OB_2B_3)+...+S(OB_{2n}B_1)}{S(N)}=4.$$

В случае квадрата это неравенство превращается в равенство.

Д. В. Фомин

Ф1137. *Электростатический генератор (см. рисунок) состоит из непроводящего цилиндра, на который наклеены полоски фольги $Ф_1$ и $Ф_2$, наружных обкладок O_1 и O_2, неподвижных токосъемников T_1 и T_2 снаружи и неподвижной перемычки внутри с токосъемниками T_3 и T_4. В исходном положении полоски фольги находятся напротив наружных обкладок и образуют с ними конденсаторы емкостью C_1 каждый. К внешним обкладкам подключен конденсатор емкостью C_0, заряженный предварительно до напряжения U_0. Каким станет напряжение на этом конденсаторе после N оборотов цилиндра по часовой стрелке? Емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала.*

При повороте цилиндра на пол-оборота полоски фольги $Ф_1$ и $Ф_2$ поменяются местами, но снова, как и в исходном положении, они вместе с обкладками O_1 и O_2 образуют два конденсатора емкостью C_1 каждый. При этом напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет в некоторое число раз k больше начального:

$$U=kU_0.$$

Следующие пол-оборота увеличат напряжение еще в k раз и т. д. Поэтому через N оборотов напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет

$$U_N=k^{2N}U_0.$$

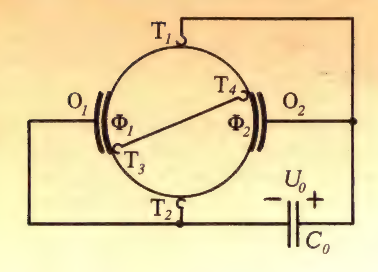
Осталось только найти число k.

В исходном положении напряжение между обкладками O_1 и O_2 равно U_0. Это напряжение приложено к последовательно соединенным конденсаторам с одинаковыми емкостями C_1. Следовательно, напряжение на каждом конденсаторе $U_1=U_0/2$, а заряд $q_1=C_1U_0/2$.

Когда поворот цилиндра приведет к контакту полосок фольги с токосъемниками T_1 и T_2, заряды с этих полосок уйдут на пластины конденсатора емкостью C_0. Уйдут заряды и с обкладок O_1 и O_2. Поскольку емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала, обкладки разрядятся почти полностью. Поэтому к начальному заряду C_0U_0 положительной пластины конденсатора добавится еще заряд $C_1U_0/2$ с полоски фольги $Ф_1$ и заряд $C_1U_0/2$ с обкладки O_2, отрицательные же заряды перейдут на отрицательную пластину конденсатора. Таким образом, на конденсаторе емкостью C_0 окажется заряд

$$q=(C_0+C_1)U_0.$$

При дальнейшем повороте цилиндра его контакт с токосъемниками T_1 и T_2 прекратится, ровно через пол-оборота полоска фольги $Ф_1$ коснется токосъемника T_4, а полоска $Ф_2$ — токосъемника T_3, полоски прибли-





зятся к обкладкам и вновь образуют два конденсатора емкостью C_0 каждый. Заряд q при этом перераспределится между пластиной конденсатора емкостью C_0 и обкладкой O_2:

$$(C_0+C_1)U_0 = C_0U + C_1U/2,$$

откуда

$$U = \frac{C_0+C_1}{C_0+C_1/2}U_0 .$$

Коэффициент при U_0 как раз и дает нам число k, поэтому окончательное напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет

$$U_N = \left(\frac{C_0+C_1}{C_0+C_1/2}\right)^{2N}U_0.$$

Наибольшее значение напряжения отвечает случаю, когда C_0 много меньше C_1:

$$U_{N\,\max} \approx 2^{2N}U_0.$$

Однако у реальных электростатических генераторов при достижении больших напряжений происходит электрический пробой.

И. И. Воробьев



Ф1138. *Разгоняясь с максимально возможным ускорением на прямом участке шоссе, гоночный автомобиль увеличивает скорость от $v_1=10{,}0$ м/с до $v_2=10{,}5$ м/с за время $\Delta t_1=0{,}1$ с. За какое время он смог бы сделать то же самое на кольцевом участке шоссе с радиусом $R=30$ м? При каком радиусе кольца он вообще не смог бы увеличить скорость выше 10 м/с? Плоскость шоссе горизонтальна.*

Максимально возможное ускорение

$$a = \frac{v_2-v_1}{\Delta t_1} = 5\ \text{м/с}^2$$

определяется силой трения и остается одним и тем же как для прямого, так и для кольцевого участка шоссе. При движении по окружности полное ускорение $\vec{a}$ складывается из касательного ускорения $\vec{a}_к$ ($a_к=\Delta v/\Delta t$) и нормального ускорения $\vec{a}_н$ ($a_н=v^2/R$):

$$\vec{a} = \vec{a}_к + \vec{a}_н,$$

или

$$a^2 = a_к^2 + a_н^2,$$

откуда

$$a_к = \sqrt{a^2-a_н^2}\,.$$

В нашем случае модуль скорости меняется мало, и касательное ускорение можно считать постоянным. Тогда искомое время

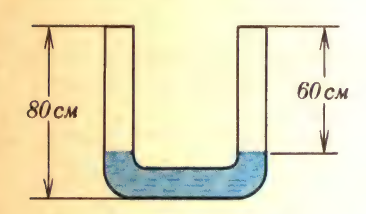
$$\Delta t_2 = \frac{\Delta v}{a_к} = \frac{v_2-v_1}{\sqrt{a^2-(v_1^2/R)^2}} = 0{,}15\ \text{с}.$$

Минимальный радиус поворота при скорости v_1

$$R_{\min} = \frac{v_1^2}{a} = 20\ \text{м}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1139. *U-образная трубка частично заполнена водой (см. рисунок). Верхние концы трубки закрывают и нагревают правое колено трубки до температуры $t_2=100$ °C, а левое — до $t_1=+99{,}5$ °C. Определить установившуюся разность уровней воды в коленах трубки. Справка: на высоте 23 этажа (70 м над землей) температура кипения воды на 0,25 градуса ниже, чем на уровне земли. Тепловым расширением стекла при расчетах пренебречь.*



Каждое из колен трубки содержит над водой воздух (который был там до нагревания) и насыщенный водяной пар. Будем считать, что при нагревании испарилось совсем немного воды (это потом легко можно проверить), т. е. когда уровень воды в одном из колен поднялся на Δh, в другом он должен опуститься тоже на Δh, и запишем условие равновесия воды в трубке после нагревания:

$$p_1+p_{н1}+\rho_{воды}g(2\Delta h) = p_2+p_{н2},$$

где p_1 и p_2 — давления воздуха, $p_{н1}$ и $p_{н2}$ — давления насыщенного водяного пара.

Давления воздуха легко выразить через атмосферное давление p_0, изменения объемов и температур:

$$p_1=p_0\frac{T_1}{T_0}\,\frac{h_0}{h_0-\Delta h},\quad p_2=p_0\frac{T_2}{T_0}\,\frac{h_0}{h_0+\Delta h}.$$

Отсюда найдем разность давлений воздуха:

$$\Delta p_{возд}=p_1-p_2=p_0\left(\frac{T_1}{T_0}\,\frac{1}{1-\Delta h/h_0}-\frac{T_2}{T_0}\,\frac{1}{1+\Delta h/h_0}\right)=$$

$$=\frac{p_0}{T_0}\,\frac{T_1-T_2+(T_1+T_2)\Delta h/h_0}{1-(\Delta h/h_0)^2}\approx\frac{p_0}{T_0}\left(T_1-T_2+(T_1+T_2)\frac{\Delta h}{h_0}\right)$$

(здесь мы учли, что $\Delta h/h_0\ll 1$).

Согласно условию задачи, разность давлений насыщенного пара в коленах трубки равна давлению столба воздуха высотой $H=140$ м:

$$\Delta p_{н}=p_{н2}-p_{н1}=\rho_{возд}gH=\frac{p_0M_{возд}}{RT_0}gH.$$

Теперь из условия равновесия найдем отношение

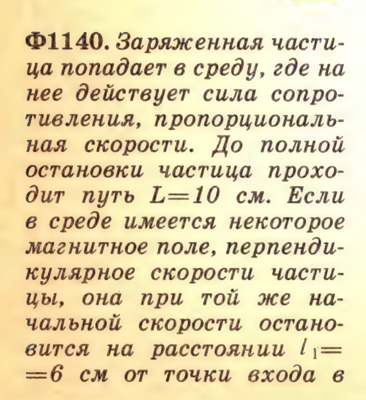
$$\frac{\Delta h}{h_0}=\frac{T_2-T_1+M_{возд}gH/R}{T_1+T_2+2\rho_{воды}gh_0T_0/p_0}\approx 7\cdot 10^{-3}$$

и установившуюся разность уровней воды

$$2\Delta h\approx 8{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 0{,}84\ \text{см}$$

(здесь мы приняли $T_0=273$ К, $p_0=10^5$ Па, $h_0=60$ см).

А. Р. Зильберман



Ф1140. *Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. До полной остановки частица проходит путь $L=10$ см. Если в среде имеется некоторое магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, она при той же начальной скорости остановится на расстоянии $l_1=6$ см от точки входа в*

При наличии магнитного поля на частицу в среде действуют две взаимно перпендикулярные и пропорциональные скорости частицы силы. Это сила трения $\vec F_{тр}$ —

$$F_{тр}=kv=k\Delta s/\Delta t$$

и сила Лоренца $\vec F_{Л}$ —

$$F_{Л}=qBv=qB\Delta s/\Delta t.$$

Изменение импульса частицы $m\Delta\vec v$ за время Δt будет векторно складываться из импульса силы трения $\vec F_{тр}\Delta t$ и импульса силы Лоренца $\vec F_{Л}\Delta t$, образуя прямоугольный треугольник (рис. 1). Подобный же треугольник образуют и соответствующие векторы за все время движения частицы в среде (рис. 2; здесь l —



среду. На каком расстоянии l_2 от точки входа частица остановилась бы, если бы поле было в два раза меньше?

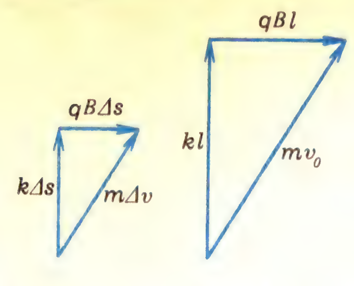


Рис. 1. *Рис. 2.*

расстояние от точки входа в среду до точки остановки, v_0 — начальная скорость частицы в среде).

В отсутствие магнитного поля прямоугольный треугольник, изображенный на рисунке 2, вырождается в прямую линию, и

$$mv_0=kL.$$

В магнитном поле с индукцией B

$$mv_0=\sqrt{(kl_1)^2+(qBl_1)^2}.$$

Аналогично в поле с индукцией $B/2$

$$mv_0=\sqrt{(kl_2)^2+(qBl_2/2)^2}.$$

Из последних трех соотношений находим искомое расстояние l_2:

$$l_2=l_1\frac{2}{\sqrt{1+3(l_1/L)^2}}=8{,}3\text{ см}.$$

А. И. Буздин

Ф1141. *В настоящее время в связи с открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости изучается вопрос о создании линии передачи постоянного тока без потерь энергии на джоулево тепло. Предполагается использовать для передачи постоянного тока коаксиальный кабель, состоящий из внутренней цилиндрической жилы и наружной цилиндрической оболочки, выполненных из сверхпроводника. Электрическое и магнитное поля в такой системе изображены на рисунке. Известно, что индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника не может превышать некоторого значения B_{max}, иначе разрушается сверхпроводимость, а напряженность электрического поля не должна превышать E_{max}, иначе происходит электрический пробой изолирующей прослойки кабеля. Определите, во сколько раз изменится максимальная мощность постоянного тока, передаваемая по такому кабелю, если диаметры внутренней и внешней оболочек увеличить в два ра-*

Как видно из условия задачи, индукция B магнитного поля принимает максимальное значение вблизи внутренней жилы кабеля. Оно не должно превышать заданную величину B_{max}, иначе произойдет разрушение сверхпроводимости внутренней жилы. Это условие определяет максимальный ток I_{max}, который можно пропускать по кабелю:

$$B_{max}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_{max}}{d/2}=\frac{\mu_0 I_{max}}{\pi d},$$

$$I_{max}=\frac{\pi d B_{max}}{\mu_0}.$$

Таким образом, при заданном значении B_{max} максимальный ток пропорционален диаметру внутренней жилы кабеля:

$$I_{max}\sim d.$$

Напряженность E электрического поля в пространстве между цилиндрическими проводниками изменяется обратно пропорционально расстоянию r от оси цилиндров:

$$E(r)\sim\frac{1}{r}.$$

Качественно эту зависимость легко понять с помощью приведенной на рисунке картины силовых линий электрического поля (вспомните, что напряженность электрического поля характеризует густоту силовых линий, т. е. число линий, пронизывающих единичную площадку). Количественную зависимость $E(r)$ попробуйте получить самостоятельно.

Итак, напряженность электрического поля, так же как и индукция магнитного поля, наибольшее значение принимает вблизи внутренней жилы кабеля. Именно в этом месте напряженность не должна превышать значение E_{max}, иначе произойдет электрический пробой. Если при $r=d/2$ напряженность поля

за. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю с диаметрами оболочек $D=8$ см, $d=3$ см, если $E_{max}=20$ кВ/см и $B_{max}=5\cdot 10^{-2}$ Тл? Примечание: индукция магнитного поля в пространстве между цилиндрическими проводниками совпадает с полем прямого проводника с током I:

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

($\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Н/А^2 — магнитная постоянная).





равна E_{max}, то в пространстве между цилиндрическими проводниками

$$E(r)=E_{max}\frac{d/2}{r}.$$

Отсюда можно найти максимальное напряжение U_{max} между электродами:

$$U_{max}=\int_{d/2}^{D/2}E_{max}\frac{d/2}{r}\,dr=\frac{E_{max}d}{2}\ln\frac{D}{d}.$$

Если сравниваемые в задаче кабели геометрически подобны, т. е. $D/d=\text{const}$, то максимальное напряжение пропорционально диаметру внутренней жилы:

$$U_{max}\sim d.$$

Следовательно, максимальная мощность, передаваемая по кабелю,

$$P_{max}=U_{max}I_{max}\sim d^2.$$

При увеличении диаметров внутренней жилы и наружной оболочки кабеля в 2 раза максимальная передаваемая мощность возрастает в 4 раза. Для кабеля, параметры которого заданы в условии задачи, максимальная мощность равна

$$P_{max}=U_{max}I_{max}=\frac{\pi d^2 E_{max}B_{max}}{2\mu_0}\ln\frac{D}{d}\approx 10^8 \text{ Вт}.$$

С. М. Козел

Ф1142. *Образование кометного семейства Юпитера описывается следующей схемой. Комета падает с большого удаления без начальной скорости на Солнце и пролетает невдалеке от Юпитера (см. рисунок). После прекращения заметного влияния поля тяготения Юпитера комета вновь движется в поле Солнца, причем ее скорость оказывается направленной противоположно скорости Юпитера, а афелий новой орбиты кометы располагается вблизи орбиты Юпитера, т. е. на расстоянии $R=5{,}2$ а. е. от Солнца. На каком расстоянии от Солнца будет располагаться перигелий орбиты такой кометы?*

Заметим, что Солнце более чем в 10^3 раз массивнее Юпитера, так что размеры области, где тяготение Юпитера сравнимо с влиянием Солнца, в 10^6 раз меньше радиуса орбиты планеты. Вместе с тем, время существенного взаимодействия кометы с Юпитером несопоставимо мало́ по сравнению с периодами обращения Юпитера и кометы вокруг Солнца, следовательно, смещение кометы за это время ничтожно. Поэтому мы можем движение кометы разбить на три независимых этапа: 1) движение кометы из удаленного положения по направлению к Солнечной системе под действием тяготения Солнца, 2) «мгновенный» разворот в поле Юпитера, 3) движение по эллиптической орбите вокруг Солнца (причем на этом этапе влияние Юпитера учитывать не надо).

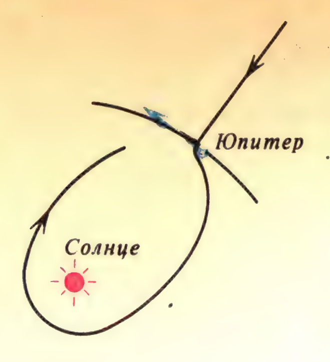
Из условия движения Юпитера по круговой орбите под действием притяжения Солнцем массой M

$$\frac{v^2}{R}=\frac{GM}{R^2}$$

получим скорость Юпитера v:

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Скорость кометы $v_к$ при подлете к Юпитеру в конце первого этапа определим из закона сохранения



энергии (на бесконечно большом удалении энергия, как обычно, принята равной нулю):

$$\frac{v_к^2}{2}-\frac{GM}{R}=0,\ v_к=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=v\sqrt{2}\,.$$

Направления скоростей кометы и Юпитера вначале перпендикулярны друг другу, значит, относительно Юпитера скорость кометы равна

$$v'_к=v\sqrt{3}.$$

После выхода из поля тяготения Юпитера (в начале третьего этапа) скорость кометы относительно планеты изменяется только по направлению, но по отношению к Солнцу она становится равной

$$v_1=v(\sqrt{3}-1).$$

Теперь комета вновь взаимодействует только с Солнцем. В афелии и в перигелии скорость перпендикулярна радиусу-вектору, проведенному из Солнца, значит, второй закон Кеплера запишется так:

$$v_1R=v_2x.$$

Из закона сохранения энергии —

$$\frac{v_1^2}{2}-\frac{GM}{R}=\frac{v_2^2}{2}-\frac{GM}{x}\,.$$

Решая совместно полученные уравнения, мы найдем два ответа:

$$x_1=R=5{,}2\ \text{а. е.}$$

— это афелий, для которого уравнения обращаются в тождества, и

$$x_2=R(2-\sqrt{3})\ /\ (\sqrt{3}-1)=0{,}37\ R=1{,}9\ \text{а.е.}$$

— это и есть искомое расстояние в перигелии.

В. Е. Белонучкин

Вниманию подписчиков!

В наступающем году количество страниц в нашем журнале увеличивается на 25 %, что позволяет нам открыть ряд новых рубрик.

Для компенсации расходов по увеличению объема журнала цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год. Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер.

Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

ОДИН, ДВА, МНОГО

Наверное, все вы слышали о некоторых племенах Африки и Южной Америки, счет в которых ведется так: один, два, много. Но существует еще одно племя, разбросанное по всему миру, представители которого считают таким же способом,— это ученые,— в частности, математики. Не верите? Откройте энциклопедический словарь и посмотрите слова, начинающиеся на «моно», «ди», «поли», а также на «уни», «би», «мульти». Первая тройка — один, два, много — по-гречески, а вторая — то же самое по-латыни. Вот некоторые из таких слов.



Монотонная функция — функция, которая либо всюду возрастает, либо всюду убывает. Например, $y=2^x$ или $y=x^3$. Монотонные функции обладают очень интересными свойствами, например, любая «хорошая» функция является разностью монотонных.

Монография — книга, посвященная рассмотрению одного вопроса. Например, если книга называется «Монотонные функции», то это наверняка монография. Авторов у нее может быть и много.



Уникурсальная кривая — кривая, которую можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя два раза по одному участку. Отметим те точки, из которых можно идти более, чем в двух направлениях; назовем их вершинами. Рассмотрим те вершины, из которых выходит нечетное число направлений. Если таких точек не больше двух, то кривая — уникурсальна; если же таких точек больше двух — то кривая не уникурсальна.

Униформный — всюду одинаковый (буквально — единообразный).



Дихотомия — деление пополам, часто — многократное деление пополам. Вот решение такой классической задачи-шутки: как поймать льва в пустыне? Надо разделить пустыню пополам и отбросить ту часть, в которой льва заведомо нет.

Оставшуюся половину надо снова разделить пополам и снова отбросить ту часть, где льва нет. И так далее. По известной теореме о вложенных «отрезках» лев рано или поздно будет пойман.

Дилемма — необходимость выбора из двух возможностей (см. задачу о поимке льва).



Биквадратное уравнение — квадратное уравнение относительно квадрата неизвестного.

Биссектриса — прямая, делящая угол на две равные части.

Бинарный — двойной, зависящий от двух переменных. Часто говорят «бинарная операция», подразумевая операцию, применяемую к двум элементам. Так, обычные сложение, вычитание, умножение и деление — это бинарные операции.

Бином Ньютона — выражение вида $(a+b)^n$. Коэффициенты в разложении бинома по степеням a и b называются биномиальными коэффициентами.



Полиэдр — многогранник, не обязательно трехмерный.

Полином — сумма одночленов, многочлен. Например, x^3+9x^2+8x+9 — многочлен от одной переменной, $x^3+x^2y+3xy^2+7y^3$ — многочлен от двух переменных. Некоторые многочлены особенно знамениты и носят специальные названия: *полиномы Чебышева, полиномы Лежандра* и др.



Мультипликативный — имеющий отношение к умножению. Так, мультипликативной теорией чисел называется часть теории чисел, рассматривающая свойства натуральных чисел, связанные с их разложениями на множители, в частности, свойства простых чисел.

Мультииндекс — совокупность нескольких написанных подряд индексов; например, ij в записи a_{ij}.

Подобные слова встречаются и в физике (биполь, диод, поликристаллические структуры), и в химии (диметилфтолат), и в медицине (поливитамины), и в других науках, и просто в быту (бинокль, монокль, уникум). Слова, начинающиеся с «три», «тетра», «пента», ... или с «терци», «кварта», «квинта», ..., т. е. с «три», «четыре», «пять», ... по-гречески или по-латыни, тоже есть, но употребляются они реже (триграмма, тетраэдр, октаэдр, гексаэдр, додекаэдр, икосаэдр, квартика и т. д.). Так что можно говорить об ученых как о людях, называющих окружающие их предметы и явления все же по принципу: один, два, много. Вы, наверное, заметили, что греческие и латинские слова используются довольно произвольно. Монокль и бинокль — первое от греческого «моно», а второе — от латинского «би»; бином и полином — первое от латинского «би», а второе — от греческого «поли». Приживалась, видимо, та приставка, с которой слово получалось благозвучнее. Не следует путать приставку «ди» с приставками «диа» (через): диафрагма, диаметр, диагональ и «дис», «диз» (не): дискретный, дизъюнкция.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 26)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

Н. Андрианов — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
И. Аржанцев — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
В. Барановский — Омск, с. ш. № 115, 9 кл.
М. Выборнов — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
С. Зелик — Краматорск, с. ш. № 35, 10 кл.
А. Козачко — Винница, с. ш. № 6, 8 кл.
А. Коршков — Мозырь, с. ш. № 8, 10 кл.
И. Марков — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Р. Мучник — Винница, с. ш. № 15, 8 кл.
В. Рагулин — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. Серебряков — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
А. Скопенков — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
К. Ушаков — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Д. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
А. Шаповал — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
А. Эгамов — Гороховец, с. ш. № 1, 9 кл.

По физике

А. Бабкин — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
В. Бескровный — Донецк, с. ш. № 20, 10 кл.
И. Блайвас — Ростов-на-Дону, с. ш. № 5, 10 кл.
В. Высоцкий — Киев, с. ш. № 77, 9 кл.
И. Гляненко — Грозный, с. ш. № 17, 10 кл.
В. Гусятников — Москва, с. ш. № 1267, 10 кл.
П. Девянин — Москва, с. ш. № 296, 10 кл.
Н. Демчук — Здолбунов, с. ш. № 1, 9 кл.
А. Жук — Ровно, с. ш. № 15, 9 кл.
А. Залеский — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
К. Зуев — Вологда, с. ш. № 8, 10 кл.
И. Иоппе — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
В. Камчатный — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
А. Коршков — Мозырь, с. ш. № 8, 10 кл.
Н. Кузьма — п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1, 10 кл.
Д. Лабутин — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Р. Малков — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
И. Мартин — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
Д. Мацукевич — Минск, с. ш. № 107, 10 кл.
А. Мельников — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
П. Михеев — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
А. Пушнов — Вольск, с. ш. № 12, 10 кл.
Т. Рашник — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
С. Рудницкий — Одесса, с. ш. № 28, 10 кл.
Д. Самборский — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. Тозик — Минск, с. ш. № 93, 10 кл.
Ю. Уваров — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
А. Усинский — с. Птичья Ровенской обл., Вербская с. ш., 9 кл.
Д. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
А. Фридлянд — Саратов, с. ш. № 13, 9 кл.
И. Химони — Днепропетровск, с. ш. № 53, 10 кл.
Ю. Шарлай — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
Е. Швец — Черновцы, с. ш. № 24, 10 кл.
С. Шинкевич — Березники, с. ш. № 3, 9 кл.

Вниманию читателей!

По инициативе журнала «Квант» и фирмы «Международная образовательная сеть» (США) и при содействии ряда советских и американских организаций в этом году впервые проводятся совместные летние физико-математические школы.

Американские школьники проведут 4 недели в Молодежном лагере в нашей стране.

Группу советских ребят, в которую войдут 15 школьников из числа участников конкурса «Задачник «Кванта», Всесоюзных олимпиад по математике, физике и информатике, Всесоюзного турнира юных физиков, примет университет Стони Брук (штат Нью-Йорк). В связи с тем, что занятия будут проводиться на английском языке, члены группы должны обязательно знать язык.

Мы надеемся, что такие школы станут традиционными.

Участие в них зависит от вас самих.

Желаем успеха!

Задачи



1. Сережа сложил три последовательных натуральных числа, потом три следующих числа, после чего полученные суммы перемножил. Могло ли у него получиться число 111 111 111?

2. На стол положили 35 спичек так, как показано на рисунке. Получилась спираль, «закрученная» по часовой стрелке. Переложите четыре спички так, чтобы получилась такая же спираль, закрученная против часовой стрелки.

3. С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: либо заменять его удвоенным, либо стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций получить из числа 458 число 14?

4. Может ли быть верным равенство

Ж·У·Р·Н·А·Л=К·В·А·Н·Т,

если в него вместо букв подставить цифры от 1 до 9? Одинаковым буквам при этом должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

5. В правильном восьмиугольнике провели две параллельные диагонали (см. рисунок). Докажите, что площадь получившегося прямоугольника вдвое меньше площади восьмиугольника.

Эти задачи нам предложили *С. А. Генкин, А. М. Домашенко, Д. В. Фомин, А. П. Тонких, В. В. Произволов.*



О ДАВЛЕНИИ

Кандидат педагогических наук
С. А. ТИХОМИРОВА

В этой статье мы хотим предложить вам несколько «задач на давление». Формулировки их не совсем обычны, потому что взяты они не из задачника по физике, не из учебника, а из произведений художественной литературы. Разумеется, авторы этих произведений не думали «задавать задачи». Но писатель умеет видеть...

Давайте взглянем на приведенные ниже отрывки с физической точки зрения.

В повести И. С. Соколова-Микитова «Весна в Чуне» есть такие строки: «Выследив стадо лосей, медведь-лосятник старается отбить одного лося, потом долго гоняет его по глубокому снегу. Крепкий наст хорошо выдерживает тяжесть медведя. Проваливающегося в снегу лося медведь преследует, пока тот остановится от изнеможения, и тогда легко расправляется с выбившейся из сил добычей».

Почему лось проваливается в снег, а медведь нет?

Несколько строк из романа Ж. Верна «Дети капитана Гранта».

«В пять часов утра барометр показал, что путешественники достигли высоты в семь тысяч пятьсот футов. Таким образом, они находились на вторичных плоскогорьях, там, где уже кончалась древесная растительность...»

«Паганель захватил с собой барометр и, взглянув на него, убедился, что ртуть держится на уровне 0,495 миллиметра. Падение ртутного столба барометра соответствовало высоте в одиннадцать тысяч семьсот футов.»

Какое давление показывал барометр на вторичных плоскогорьях? Не возникает ли у вас сомнение в правильности последних строк?

В романе М. Шолохова «Поднятая целина» есть такой эпизод: дед Щукарь объелся телятиной, у него разболелся живот. Чтобы вылечить деда, лекарка поставила ему на живот разогретую махотку (глиняный горшок). «Ой, живот мне порвет! Ой родненькие, ослобоните! — закричал дед Щукарь.» Но попытки оторвать махотку оказались тщетными. Тогда Давыдов взял скалку и стукнул ею по дну махотки, «она рассыпалась, и воздух со свистом рванулся из-под черепков».

Почему не удалось снять горшок и пришлось его расколоть? Верно ли (разумеется, с точки зрения физики) описано поведение воздуха после того, как разбили махотку?

Из романа А. Беляева «Человек-амфибия»: «Ихтиандр опускался все глубже и глубже в сумеречные глубины океана. Ему хотелось быть одному, прийти в себя от новых впечатлений... Он погружался все медленнее. Вода становилась плотнее, она уже давила на него, дышать становилось все труднее. Здесь стояли густые зелено-серые сумерки».

Действительно ли давление на глубине определяется увеличением плотности воды?

Фрагмент из рассказа Б. Житкова «На воде». Шквал перевернул парусное судно вверх дном, «...опрокинутое судно плавало: находившийся внутри воздух не успел выйти... В кубрике становилось заметно душно.

Запыхавшиеся люди часто дышали и спешили прорубить выход на волю, к свежему воздуху. Они боялись задохнуться и каждую минуту думали, что вот-вот судно начнет погружаться под воду... Ковалев перевел дух и хотел крикнуть товарищам, что

уж виден свет. Он слышал тонкий свист прорывавшегося через дырку воздуха. Ковалев приставил к дырке мокрый палец: нет, из дыры не дуло. Куда же идет воздух? Ковалев понял, что воздух не входит в каюту. А ведь слышно, как он идет! Значит, вон из каюты выходит воздух?..

И вдруг все сообразил. Их каюта — как опрокинутый вверх дном пустой стакан: если его пихать в воду, то воздух в стакане не даст войти воде; но если в дне такого стакана сделать дырку, то воздух уйдет через нее, и весь стакан заполнит вода».

Этот отрывок — не одна, а сразу несколько задач (и не только «на давление»). Попробуйте сами сформулировать вопросы, на которые «наводит» этот текст (и, разумеется, ответить на них).

В рассказе Г. Троепольского «Один день» есть такой разговор:

«...Митроха! Денька через два, а может, и завтра, дождик должон быть. Налегни на сев-то.

— Вот тебе на! Гляну на барометр,— забеспокоился Митрофан Андреевич. Он ушел в хату...

— Как же это вы, Андрей Петрович, узнаете об изменении погоды? — спросил я.

— Э-э, детка! Давно уж я живу-то. По всем приметам узнаю. Ласточка идет низом... Это — раз... Курица обирается носиком — перо мажет жиром. Это — два... Животная, она чувствует, и человек чувствует...»

Как меняется атмосферное давление к непогоде? Попробуйте объяснить эти изменения.

В предыдущей «задаче» Андрей Петрович упоминает несколько народных примет, связанных с погодой. Их вообще очень много, и некоторые из них имеют объяснения с точки зрения физики. Последняя задача, которую мы вам предлагаем,— именно про такую примету.

В повести «Мещерская сторона» К. Паустовский пишет: «Самая простая примета — это дым костра. То он подымается столбом к небу, спокойно струится вверх, выше самых высоких ив, то стелется туманом по траве, то мечется вокруг огня... Глядя на дым, можно точно сказать, будет ли завтра дождь... или... солнце подымется в глубокой тишине, в синих прохладных туманах».

Попытайтесь объяснить, как действует дым-барометр (на наш взгляд, это не так просто).



Половинки целого

(листая книги М. Гарднера...)

Один мальчик с увлечением занимался разведением золотых рыбок, потом это занятие ему надоело и он решил продать всех своих рыбок. Свое решение он осуществил в 5 этапов:

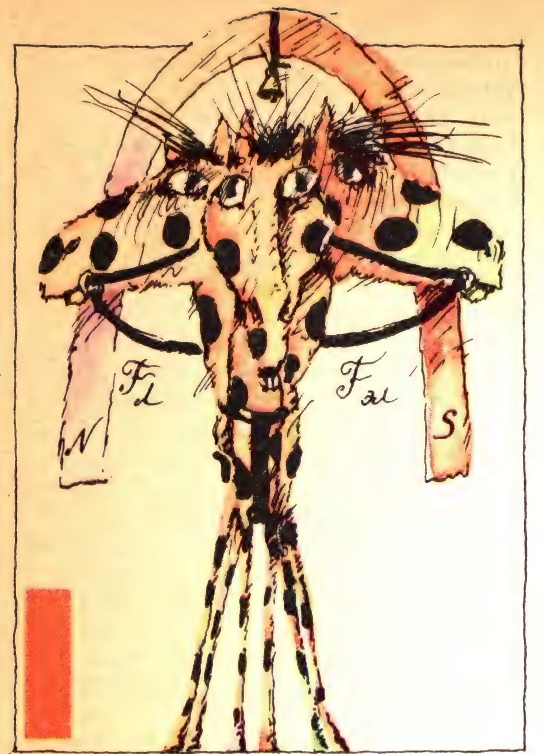
1. Продал половину всех своих рыбок и еще полрыбки.

2. Продал треть оставшихся рыбок и еще треть рыбки.

3. Продал четверть оставшихся рыбок и еще четверть рыбки.

4. Продал пятую часть оставшихся рыбок и еще одну пятую рыбки.

После этого у него осталось 19 рыбок. Разумеется, с золотыми рыбками он обращался бережно и ему в голову не приходило делить рыбку на части. Сколько рыбок было у мальчика сначала? (Ответ: 101 рыбка.)





Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Сила Лоренца и эффект Холла» предназначена девятиклассникам, заметка «Альфа-частицы и опыты Резерфорда» — десятиклассникам.

Сила Лоренца и эффект Холла

При изучении темы «Магнитное поле» вы познакомились с двумя силами. Одну из них называют силой Лоренца, другую — силой Ампера. Сила Лоренца действует со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу. Если в магнитном поле находится не один движущийся заряд, а проводник с током, то на него действует сила Ампера.

Силу Ампера легко свести к силе Лоренца, если вспомнить, что электрический ток в проводнике есть не что иное, как направленное движение свободных зарядов, например — электронов. На каждый электрон действует сила Лоренца, а сумма всех таких сил как раз и составляет силу Ампера.

На первый взгляд, все просто. Но при внимательном рассмотрении возникают вопросы. Например, может показаться непонятным, каким образом сила, действующая на свободные электроны, «передается» всему проводнику. Если электроны свободные, то они не взаимодействуют с кристаллической решеткой, а значит, и не могут оказать на нее никакого воздействия. Попробуем разобраться.

Представим себе, что электроны действительно полностью не зависят от кристаллической решетки. Тогда за очень короткое время они все должны были бы улететь из проводника (скорость электронов достаточно велика). Ясно, что это невозможно, хотя

бы потому, что при этом обнажился бы колоссальный положительный заряд. На самом деле в тонком пограничном слое проводника на электроны действует сильное электрическое поле, не позволяющее им улететь наружу. Электроны оказываются как бы запертыми внутри проводника.

Поместим проводник с током в магнитное поле, перпендикулярное направлению тока (рис. 1, *а*). На электроны начнет действовать сила Лоренца, и они будут смещаться к верхней границе проводника. В результате на верхней границе будет накапливаться отрицательный электрический заряд. Так как проводник в целом электронейтрален, на нижней границе появится избыточный положительный заряд. Этот процесс очень скоро прекратится, и только ничтожно малая часть всех электронов успеет скопиться на границе. Почему?

Дело в том, что накопление зарядов на границах приводит к появлению внутри проводника поперечного электрического поля*) (рис. 1, *б*). Легко видеть, что действие этого поля на электроны по направлению противоположно действию силы Лоренца. Когда эти две силы станут равны по модулю, движение электронов к границе проводника прекратится, и продолжится спокойное протекание электрического тока вдоль проводника.

Итак, мы более или менее разобрались, каким образом сила Лоренца, действующая на свободные электроны, передается всему проводнику: «передатчиком» служит заряд, который скапливается на его боковой поверхности. Но, внимание! Как это иногда бывает, пытаясь разобраться в одном явлении, мы попутно обнаружили другое важное физическое явление. А именно: *при помещении проводника с током в магнитное поле внутри проводника возникает электрическое поле, направленное перпендикулярно направлению тока и магнитному полю.* Этот замечательный эффект был обнаружен и исследован американским физиком Эдвином Холлом в 1879 году и теперь носит его имя.

Чтобы понять, почему мы назвали эффект Холла замечательным, рассмотрим его несколько подробнее. Вычислим сначала разность потенциалов $\Delta\varphi_X$ (ее называют холловской разностью потенциалов), которая образуется между боковыми поверхностями проводника. Как мы уже говорили, процесс накопления заряда прекратится тогда, когда сила Лоренца $F_Л = evB$ будет уравновешена электростатической силой $F_{эл} = eE_\perp$:

$$evB = eE_\perp,$$

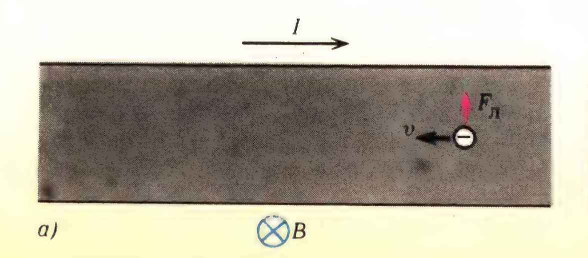
здесь v — средняя скорость направленного движения электронов, B — индукция магнитного поля, $E_\perp$ — напряженность поперечного электрического поля. Отсюда получаем

$$\Delta\varphi_X = E_\perp d = vBd,$$

где d — толщина проводника. Среднюю скорость направленного движения зарядов можно выразить через силу тока I, концентрацию свободных электронов в проводнике n и площадь его поперечного сечения S:

$$I = envS, \quad v = \frac{I}{enS}.$$

*) Продольное поле существовало и до этого. Его роль, как вы знаете,— поддерживать прохождение электрического тока.



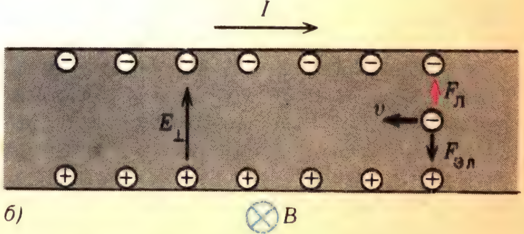
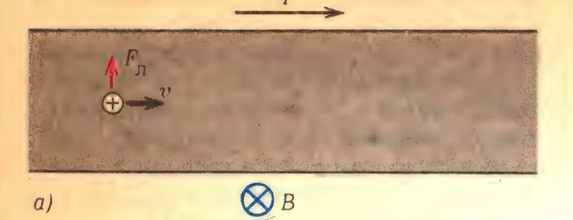


Рис. 1.



б)

Рис. 2.

Тогда окончательно

$$\Delta\varphi_X = \frac{d}{enS} IB.$$

Глядя на эту формулу, нетрудно представить основные возможности применения эффекта Холла. Рассмотрим некоторые из них.

1. Эффект Холла можно использовать для измерения индукции магнитного поля. Для этого изготавливают проводник небольшого размера (его называют датчиком Холла) и определяют для него коэффициент пропорциональности между $\Delta\varphi_X$ и произведением IB, используя какое-то известное (эталонное) магнитное поле. Затем, помещая датчик Холла в различные точки исследуемого поля, измеряют ток и холловскую разность потенциалов, и по этим данным вычисляют B.

2. Результаты измерений холловской разности потенциалов легко воспроизводимы, поэтому эффект Холла нередко используют для создания эталонного напряжения.

3. Эффект Холла играет важную роль при исследовании физических свойств проводящих материалов. И это самое главное его применение. Действительно, измеряя $\Delta\varphi_X$, I и B, можно вычислить такую важную характеристику, как концентрация свободных носителей зарядов в веществе при различных условиях. Ожидалось, что эта концентрация будет по порядку величины такой же, как концентрация атомов,— ведь именно от атомов кристаллической решетки «отрываются» свободные электроны. Это ожидание оправдалось для многих металлов, но не подтвердилось для полупроводников. У них концентрация свободных зарядов оказалась на много порядков меньше и к тому же сильно зависела от температуры. Представляете — один свободный электрон на сто тысяч или даже на миллион атомов! Но самый неожиданный вывод заключался в том, что по результатам опытов заряд свободных носителей во многих полупроводниках должен быть положительным!

Как же удалось это выяснить? Нетрудно заметить, что все известные вам проявления электрического тока (тепловое, магнитное и т. п.) совершенно не зависят от знака носителей заряда, т. е. все определяется только величиной силы тока, и только в эффекте Холла это не так. Посмотрите на рисунок 2, *а*. Если бы носители заряда были положительными, то при том же направлении тока скорость зарядов имела бы противоположное направление. Но раз изменился как знак заряда, так и направление скорости, то сила Лоренца будет снова направлена вверх. Значит, на верхней грани в этом случае будет скапливаться не отрицательный, а положительный заряд, и $\Delta\varphi_X$ окажется противоположного знака (рис. 2, *б*).

Такой, как его называют, аномальный эффект Холла и был обнаружен экспериментально. Возникло ощущение, что ток создается положительными электронами! На самом деле, как оказалось впоследствии, аномальный эффект Холла в полупроводниках соответствует случаю дырочной проводимости.

В заключение отметим, что несколько лет назад были обнаружены совершенно неожиданные и удивительные особенности эффекта Холла в так называемых двумерных электронных слоях, объяснение которым дает лишь квантовая теория (о квантовом эффекте Холла вы можете прочитать в статье С. Г. Семенчинского «Эффект Холла: год 1879 — год 1980» в «Кванте» № 2 за 1987 год).

А. И. Черноуцан

Альфа-частицы и опыты Резерфорда

Осенью 1903 года из Европы в Канаду отплывал тридцатидвухлетний профессор физики Эрнест Резерфорд. Он вез с собой маленькую металлическую коробочку с бесценным для него грузом — тридцать миллиграмм соли радия.

Свинцовая коробочка вызвала опасения у служащих таможни в Нью-Йорке — в то время еще не было законов, касающихся ввоза радия. Драгоценность это или химикат? Надо ли его облагать налогом и каким? Чиновники всегда и везде одинаковы, и американские таможенники решили переслать странный груз начальству. Но исследователи тоже везде и всегда одинаковы. И появился рапорт, в котором чиновники сообщили своему начальству, что доктор Резерфорд наотрез отказался расстаться со своим сокровищем. И только обязательство профессора провезти ящик через территорию Соединенных Штатов в целости (т. е. не спекулируя веществом) позволило американским чиновникам переложить решение пошлинной проблемы на плечи их канадских коллег. Возможно, благодаря именно этим миллиграммам радия и были сделаны в физике многие замечательные открытия.

Имя Резерфорда встречается в школьном курсе физики в связи с установлением планетарной модели атома. Но Резерфорд — автор и многих других, не менее ценных для физики открытий. К ним относятся, в частности, опыты по исследованию природы α-лучей. Расскажем о некоторых из них.

Еще в 1899 году, работая в Кавендишской лаборатории (в Кембриджском университете), Резерфорд установил, что излучение радиоактивных элементов не является однородным. Вот один из таких экспериментов.

Опыт 1. Две цинковые пластинки располагались горизонтально друг под другом. Одну пластинку соединяли с полюсом заземленной батареи, а другую — с заземленным гальванометром. На нижнюю пластинку насыпали тонкий слой соли радия. Излучение соли порождало в воздухе ионы, воздух между пластинками переставал быть изолятором, возникал электрический ток, который и фиксировался прибором.

Если соль радия накрыть тонким металлическим листом, часть радиации поглощается, и ток становится слабее в два с лишним раза. Если излучение заэкранировать двумя листами, ток ослабевает почти в шесть раз, если тремя — в одиннадцать раз. Казалось бы, и дальше ток должен плавно спадать (по экспоненциальному закону). Но удивительно, что опыты это не подтвердили — начиная с пятого листа, ток практически не уменьшался.

Очевидным было предположить, что ионизация воздуха вызывается, по крайней мере, двумя причинами. Или, другими словами, что излучение состоит из двух разных видов: одно излучение порождает сильную ионизацию, но хорошо поглощается металлом, другое — ионизирует воздух слабее, но зато обладает большей проникающей способностью. Первое излучение Резерфорд назвал α-лучами, а второе — β-лучами. Теперь перед учеными встала проблема исследовать природу этих лучей.

Очень скоро и довольно несложно удалось установить, что β-излучение представляет собой поток свободных электронов. Во всяком случае, в электрическом и магнитном полях β-лучи вели себя точно так же, как электроны.

Что касается α-лучей, то их отклонение в магнитном поле долгое время обнаружить не удавалось — даже в сильном поле отклонение оказывалось малым. Наконец, в 1903 году Резерфорд добился положительных результатов и показал, что α-излучение должно состоять из положительно заряженных частиц, движущихся с большими скоростями.

Следующей задачей было определить величину заряда α-частицы.

Опыт 2. Для определения заряда одной α-частицы экспериментально определялось суммарное количество электричества, переносимое всем излучением крупинки радия за определенное время, и количество α-частиц, испускаемых радием за это время. Самым сложным было зарегистрировать одну частицу. Для этого Резерфорд совместно с Гейгером в 1908 году разработали специальный метод счета α-частиц, основанный на их ионизирующем действии, и создали специальный прибор (известный вам счетчик Гейгера).

Внутри бронзового цилиндра длиной около 60 см находился разреженный воздух. По оси цилиндра была натянута тонкая проволока. Проволока соединялась с одним полюсом батареи, а поверхность цилиндра — с другим, при этом приложенное напряжение порядка 1000 вольт готово было вот-вот вызвать электрический разряд. Попавшая в цилиндр α-частица производила ионизацию воздуха, образовавшиеся при этом ионы, благодаря соударениям, усиливали ионизацию примерно в 2000 раз, в результате ток через прибор резко возрастал.

Для того чтобы в цилиндр проникали отдельные частицы, крупинка радия помещалась в дальний конец узкой стеклянной трубки длиной около 4,5 м, так что действительно лишь малая доля α-частиц, вылетающих из радия в разные стороны, попадала в цилиндр.

Разделив прошедшее количество электричества на число зарегистрированных частиц, Резерфорд получил величину заряда одной α-частицы.

Почти в то же время, в 1909 году, Резерфорд экспериментально показал, что по своей природе α-частицы представляют собой дважды ионизированные атомы гелия. Этот опыт он поставил совместно с Ройдсом.

Опыт 3. Достаточно большое количество радиоактивного газа радона вводилось в стеклянную трубку *A* (рис. 1), настолько тонкую, что большинство α-частиц свободно проникало сквозь нее. Эта трубка помещалась внутрь более широкой трубки *T*, к верхней части которой присоединялась небольшая вакуумная трубка *V* с впаянными в нее электродами. В откачанную трубку *T* снизу вводилась ртуть до тех пор, пока она не достигала нижней части трубки *A*. Альфа-частицы, скопившиеся в трубке *T*, образовывали газ. Поднимая ртуть, этот газ сжимали и часть его переводили в вакуумную трубку *V*. Возбудив там газовый разряд, можно было исследовать его спектральный состав. Любопытно, что лишь через два дня

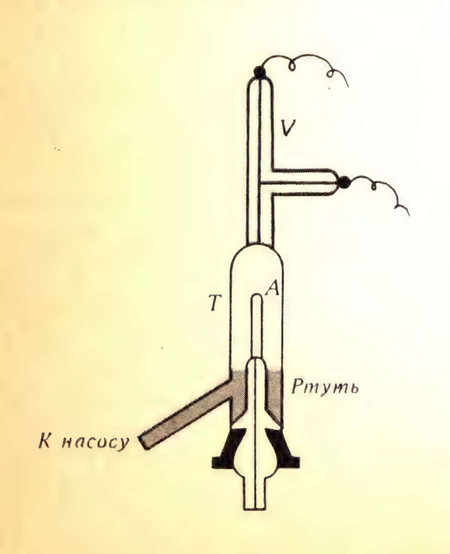


Рис. 1.

появились первые результаты — была обнаружена желтая (самая яркая) линия спектра гелия. Через шесть дней наблюдали уже весь спектр гелия.

Наконец, из опытов по отклонению α-частиц в магнитном поле можно определить их массу.

Опыт 4. Камеру Вильсона, в которой наблюдали траектории α-частиц по их сцинтилляциям, поместили в очень сильное магнитное поле. Так как радиус круговой орбиты α-частицы пропорционален массе частицы, умноженной на ее скорость, и обратно пропорционален ее заряду, по известным величинам можно было рассчитать массу α-частицы. Она оказалась равной $6{,}62 \cdot 10^{-24}$ г.

Итак, благодаря опытам Резерфорда и его сотрудников, стали известны природа, заряд и масса α-частицы. Кроме того, у физиков появился мощный и принципиально новый инструмент для исследования строения самого атома. К началу этих экспериментов Резерфорда по зондированию атомов α-частицами сложилось следующее представление о строении атома.

Атом, модель которого была предложена в 1882 году учителем Резерфорда Дж. Томсоном, напоминал пудинг с изюмом — изюминками были электроны, а тестом — само́ атомное пространство. Достоинства этой модели состояли в том, что она позволяла объяснить нейтральность атома и удовлетворительно определяла его размеры. Но существовала в физике теорема (теорема Ирншоу), которая указывала на то, что система неподвижных зарядов является неустойчивой. Кроме того, природа размазанной по всему объему атома положительно заряженной сферы была непонятна.

Бомбардировка атомов α-частицами и позволила установить строение атома.

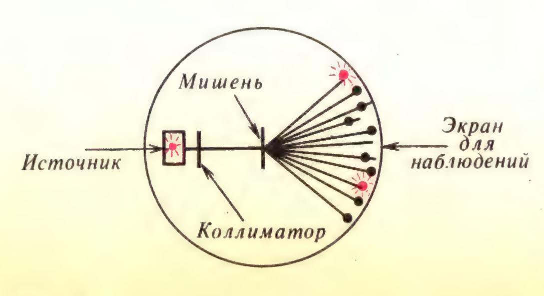


Рис. 2.

Опыт 5. Тонкие пластинки исследуемого вещества бомбардировались α-частицами и изучалось их отклонение. На рисунке 2 приведена принципиальная схема опыта по рассеянию α-частиц. Бомбардирующие частицы, вылетая из радиоактивного вещества, пройдя коллиматор, попадали узким пучком на мишень, представляющую собой очень тонкую золотую фольгу. С помощью экрана, покрытого сцинтилляционным веществом, наблюдали рассеяние α-частиц. Углы рассеяния большинства частиц были небольшими — порядка 1°, однако небольшое количество частиц рассеивалось на большие углы, и даже были частицы, движущиеся в противоположном направлении.

Проанализировав результаты опытов, Резерфорд пришел к выводу, что столь сильное отклонение α-частиц возможно только в том случае, если внутри атома имеется чрезвычайно сильное электрическое поле, созданное зарядом, связанным с большой массой (ядром атома). Резерфордом была разработана и количественная теория рассеяния α-частиц, которая устанавливала распределение частиц по углам рассеяния. В этой связи любопытен такой факт.

Чтобы в деталях разобраться в вероятностных процессах при прохождении α-частиц через вещество, Резерфорд, известный во всем мире ученый, лауреат Нобелевской премии, пожелал побывать в роли студента. Он пришел к известному манчестерскому математику Лэмбу и попросил разрешения прослушать у него курс по теории вероятностей, а также пройти всю программу практических занятий. Как писали современники, «то было нетривиальное зрелище: мировая знаменитость, восседающая среди юнцов

и склонившаяся над тетрадками с заданными упражнениями».

В 1913 году сотрудники Резерфорда проверили формулу Резерфорда, описывающую рассеяние α-частиц, подсчитав сцинтилляции, наблюдавшиеся под разными углами за одинаковые промежутки времени, и подтвердили ее. Это, безусловно, указывало на справедливость ядерной модели атома. Поскольку система неподвижных зарядов не может находиться в устойчивом равновесии, Резерфорд отказывается от статической модели атома и предполагает, что электроны в атоме движутся вокруг ядра, описывая искривленные траектории. Но в таком случае электрон должен двигаться с ускорением и, согласно классической электродинамике, излучать электромагнитные волны, что, в свою очередь, должно сопровождаться потерей им энергии. В конечном итоге электрон должен упасть на ядро.

Выход из этого противоречия был найден Нильсом Бором. Но это, как говорится, уже совсем другая история. Ну а опыты Резерфорда? Теперь они важны только для истории физики? Оказывается, нет. Интересно, что спустя почти 60 лет, уже в семидесятых годах метод Резерфорда по зондированию альфа-частицами вещества стал широко использоваться в лабораториях для изучения строения кристаллов, определения в них местоположений различных примесей и установления их состава. Его сейчас так и называют — метод обратного резерфордовского рассеяния. Только в качестве источников α-частиц используются не крошки радия, а мощные ускорители, позволяющие получать их большие потоки с большими энергиями. А прообразом их была маленькая свинцовая коробочка с солью радия, с которой, как вы помните, категорически отказался расстаться доктор Резерфорд в американской таможне.

М. Ю. Дигилов



Школа в «Кванте»

Математика 8, 9, 10

Геометрические преобразования

Часть II: Преобразования подобия

В Части I этой статьи, опубликованной в прошлом номере «Кванта», мы рассказали о том, как в решении геометрических задач применяются *движения*. Здесь мы расскажем о применении более широкого класса геометрических преобразований: преобразований подобия.

Определение. *Гомотетия с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ есть преобразование, при котором образом произвольной точки A является такая точка A', что $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$.*

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1 *(механико-математический и экономический факультеты)*

1. На плоскости найдите точку, симметричную точке с координатами (2; 4) относительно прямой, заданной уравнением $2x+y=3$.

2. Решите уравнение

$$\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2+46x+48)=0.$$

3. Окружность O_1 радиусом $3r$ касается продолжения стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиусом r касается сторон угла ABC и окружности O_1. Найдите угол ABC.

4. Решите уравнение

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\cos x\right)+\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\sin x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB=5$, $BC=2$. Известно, что $SB=4$, $SA=3$, $SC=x$, $SD=y$. При каких значениях x и y объем пирамиды наибольший, чему равен этот объем?

Вариант 2 *(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)*

1. Парабола с вершиной на оси Ox касается прямой, проходящей через точки $A(-1, -1)$ и $B(4, 4)$, в точке A. Найдите уравнение параболы.

2. Решите уравнение

$$4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x-2\sin^2 x=\sin 2x.$$

3. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC=5$, $BC=12$, описана окружность. Точки E, G — середины меньших дуг AC, BC этой окружности, точка F — середина дуги AB, не содержащей точки C. Найдите площадь четырехугольника $AEFG$.

4. Решите уравнение

$$\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2+46x+48)=0.$$

5. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC равны 1. Призма $AKLA_2K_2L_2$ с боковыми ребрами AA_2, KK_2, LL_2 симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки A. Точка E принадлежит отрезку AK, $AE:EK=1:3$, точка F принадлежит отрезку K_2L_2, $K_2F:FL_2=3:5$. Найдите длину отрезка, по которому прямая EF пересекает призму $ABCA_1B_1C_1$.

Вариант 3 *(механико-математический и экономический факультеты)*

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7^{2x}+4^{2y+1}=85,\\ 7^x-4^y=5.\end{cases}$$

2. Найдите все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-0{,}8\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}}=5\cos\frac{x}{2},$$

лежащие на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

3. В тупоугольном треугольнике ABC площадью $24\sqrt{5}$ медианы AN, CM пересекаются под углом $\arccos\frac{2}{3}$. Найдите стороны треугольника, если $AN-CM=3$.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2+3x+2a^2-3=0$$

имеет только целые решения?

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 1. Точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра B_1C_1, точка M — середина ребра A_1B_1, точка N — середина ребра AC. Через прямые KL, MN проведены параллельные плоскости. Найдите объем части призмы, содержащейся между этими плоскостями.

Вариант 4 *(физический факультет)*

1. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{3}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{9}+\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{27}=0.$$

2. Решите неравенство

$$(2^{x+1}-3^{x+1})\sqrt{2^{2x}-2^{x+3}\cdot 3^x+11\cdot 3^{2x}}\geqslant 0.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB. Известно, что биссектриса угла C делит площадь треугольника AMD пополам. Найдите длину стороны AD, если $CD=4$.

4. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-6x+6y\leqslant 0,\\ y^2-2xy+9\leqslant 0.\end{cases}$$

5. В основании четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 5 и диагональю $AC=8$. Шар касается ребер AA_1, BB_1, DD_1 и касается плоскости $ABCD$ в точке C. Найдите радиус шара.

Вариант 5 *(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)*

1. Решите уравнение

$$\lg\frac{4x^2+1}{2-x}+\lg\frac{2-x}{11x+4}=0.$$

2. Найдите все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-0{,}8\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}}=5\cos\frac{x}{2},$$

лежащие на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6};\ 2\pi\right]$.

3. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$, $BC=2$, вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B, C лежат на сторонах квадрата, не содержащих точку A. Найдите площадь квадрата.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}=4-\sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB=2$, $AC=4$. Боковые ребра пирамиды равны 4. На луче CA выбраны точки M, N, так что $CM=1$, $CN=6$, на луче BS выбраны точки P, Q, так что $BP=2$, $BQ=5$. Найдите объем пирамиды $MNPQ$.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. К телу, лежащему на горизонтальной плоскости, в течение времени τ прикладывают силу F, направленную вдоль плоскости, после чего тело движется до остановки в течение времени t. Найдите силу трения. (88 %)

2. Параллельные проводники, расстояние между которыми l, с одной стороны замкнуты на резистор сопротивлением R_1, а с другой стороны разомкнуты (рис. 1). Со скоростью v по ним движется жесткая рамка $KLMN$, стороны которой KL и MN, перпендикулярные проводникам, имеют сопротивления R_2 и R_3. Перпендикулярно плоскости проводников направлено однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Найдите ток через амперметр А. Сопротивлением проводников и амперметра пренебречь. (66 %)

3. На столе лежит грузик массой m, к которому прикреплена пружина жесткостью k. Пружину начинают поднимать за свободный конец с постоянной вертикальной скоростью v (рис. 2). Найдите максимальное удлинение пружины, если ее начальная деформация равна нулю. (53 %)

4. Оцените наибольшую температуру воздуха в стволе гладкоствольного ружья, в который влетает пуля, выпущенная из другого такого же ружья. (70 %)

5. При замыкании ключа K в цепи (рис. 3) сначала загорается лампочка $Л_2$, потом лампочки $Л_1$ и $Л_3$, при этом лампочка $Л_2$ гаснет. Объясните явление. Лампочки $Л_1$ и $Л_3$ одинаковые. (49 %).

Вариант 2

1. В сосуде, заполненном воздухом при температуре $T_0=300$ К, сожгли распыленное химическое соединение. После завершения реакции в сосуде остался только нагревшийся азот, давление которого равно начальному давлению воздуха, и твердые окислы, объем которых пренебрежимо мал. Найдите температуру азота, если молярная масса воздуха $M_1=29$ г/моль, азота $M_2=28$ г/моль, азота в воздухе в 4 раза больше (по массе), чем кислорода. (73 %)

2. Прямоугольная пластина длиной L, двигаясь поступательно со скоростью v по гладкой горизонтальной плоскости, наезжает под углом 90° на шероховатую полосу шириной l и останавливается, пройдя от начала торможения путь s, такой, что $l<s<L$ (рис. 4). Найдите коэффициент трения поверхностей пластины и полосы. Ускорение свободного падения равно g. (34 %)

3. Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 соединили последовательно и зарядили от источника с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 5, *а*). Затем конденсаторы пересоединили параллельно (рис. 5, *б*). Какая энергия выделится в результате этого пересоединения? (38 %)

4. Оцените, на какую высоту может бить фонтан, если давление воды в подводящей трубе составляет 1,5 атмосферы. (65 %)

5. Последовательно с обмоткой трансформатора в цепь переменного тока включена лам-

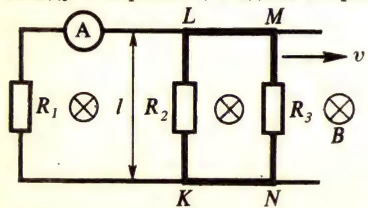


Рис. 1.

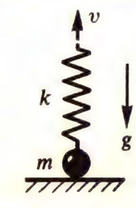


Рис. 2.

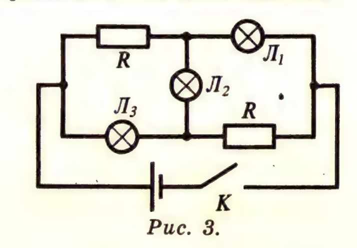


Рис. 3.

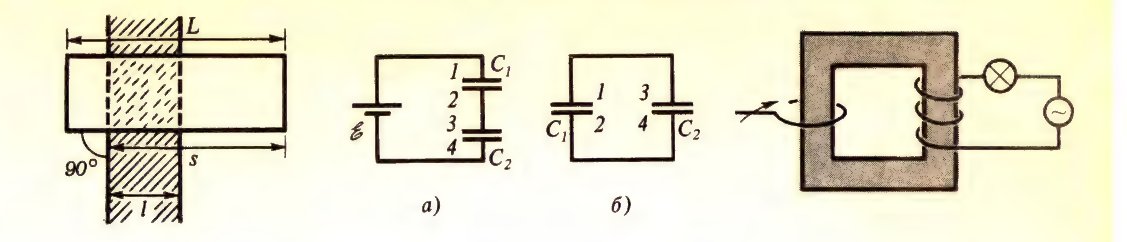


Рис. 4. Рис. 5. Рис. 6.

па (рис. 6). Если снаружи охватить трансформатор замкнутым проводником, то накал спирали лампы не меняется. Если же проводник пропустить внутрь трансформатора, то лампа горит ярче. Объясните явление. (40 %)

Вариант 3

1. Заряженные металлические шарики одинакового радиуса притягиваются, сталкиваются и потом разлетаются. Когда расстояние между ними достигает первоначального значения, сила отталкивания оказывается в 8 раз меньше исходной силы притяжения. Найдите отношение начальных зарядов шариков. (78 %)

2. Пуля пробивает закрепленную доску при минимальной скорости v_0. С какой скоростью должна лететь пуля для того, чтобы пробить незакрепленную доску? Масса доски M, масса пули m, пуля попадает в центр доски. (45 %)

3. Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S, верхний торец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу. Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы один моль воздуха, который занимает объем V при атмосферном давлении $p_а$ (рис. 7). Поршень, который вначале прижат снизу к перегородке, отпускают. Полагая, что внутренняя энергия газа равна cT, найдите, на сколько опустится поршень. (35 %)

4. Жидкий раствор бетона налили в кузов самосвала доверху. Оцените, какая доля раствора останется в кузове после резкого торможения. (35 %)

5. Два одинаковых электромагнита L_1 и L_2 включены последовательно в цепь постоянного тока. С помощью ключа K_1 параллельно одному из них может в непроводящем направлении подключаться диод D (рис. 8). При замкнутом ключе K_2 к электромагнитам притянута железная пластинка. Если ключ K_1 разомкнут, то при размыкании ключа K_2 пластинка отрывается от магнитов одновременно и падает, сохраняя горизонтальное положение. Если ключ K_1 замкнут, то при размыкании ключа K_2 пластинка вначале отрывается от магнита L_1, а потом от L_2, что приводит к ее вращению. Объясните различие в поведении пластинки в первом и втором случаях. (66 %)

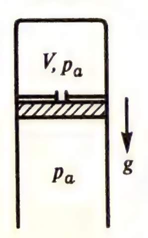


Рис. 7.

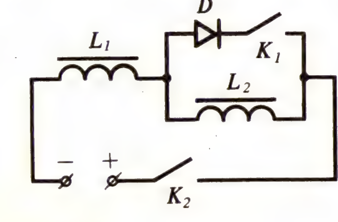


Рис. 8.

Публикацию подготовили
М. Л. Вишневский, В. М. Копытов, Г. В. Меледин, В. А. Чуркин

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^3+x^2-2x+1}\leqslant x.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=a.$$

3. Четырехзначное натуральное число A оканчивается цифрой 1. Двузначное число, образованное цифрами в разряде тысяч и сотен, цифра десятков и цифра единиц числа A представляют три последовательных члена арифметической прогрессии. Из всех чисел A, удовлетворяющих указанным условиям, найдите то, у которого разность между цифрой десятков и цифрой сотен имеет наименьшее возможное значение.

4. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ AC которого образует со стороной BC угол α, а с боковым ребром SC — угол β. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех вершин пирамиды. Найдите площадь образовавшегося сечения, если известно, что все боковые ребра пирамиды имеют длину l.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\sqrt{3x^2+25x+42}>x+4.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 6^{-\sin 3x}+6\cdot 7^{\cos y}=72,\\ 6^{1-\sin 3x}+7^{1+\cos y}=c. \end{cases}$$

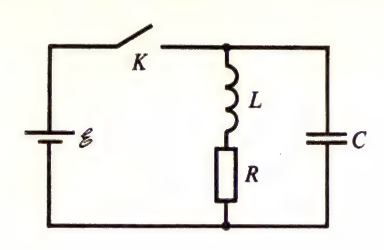


Рис. 1.

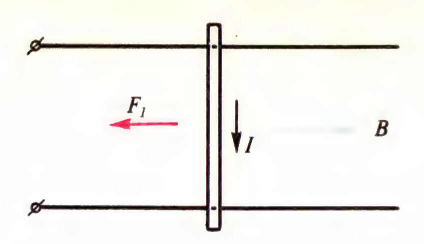


Рис. 2.

3. В первом и втором сосудах содержится кислота: в первом сосуде 5 л 30-процентного раствора, во втором сосуде 7 л 40-процентного раствора. Этими растворами наполнен 10-литровый сосуд так, что концентрация кислоты в нем оказалась равной c %. Остальную кислоту слили в четвертый сосуд. В каком из двух сосудов — в третьем или в четвертом — концентрация кислоты больше?

4. В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна l, а угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Подвешенному на нити длиной $l=1$ м шарику сообщили начальную скорость v_0 такую, что, когда нить отклонилась на угол $\alpha=60°$ от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найдите v_0.

2. Пуля массой $m_1=9$ г, летевшая вертикально вверх со скоростью $v_0=200$ м/с, пробила лежавшую на двух столах (как на опорах) доску массой $m_2=0{,}27$ кг. При этом доска подпрыгнула на высоту $h=0{,}2$ м над уровнем столов. Какое количество теплоты выделилось при прохождении пули через доску?

3. Шайба массой $m=1{,}2$ кг лежит на конце доски длиной $l=1{,}5$ м, противоположный конец которой выступает на $h=0{,}5$ м за край стола. Масса доски $M=2{,}4$ кг, коэффициент трения между доской и шайбой $\mu=0{,}4$, относительно стола доска не проскальзывает. Какую минимальную скорость нужно сообщить шайбе в направлении к краю стола, чтобы доска опрокинулась?

4. Тело лежит на гладкой горизонтальной поверхности. К телу привязана легкая нерастяжимая нить, которая перекинута через блок очень малого радиуса, находящийся на высоте $h=1$ м над поверхностью. К другому концу нити приложена постоянная горизонтальная сила. Определите скорость тела в тот момент, когда оно окажется под блоком, если первоначально тело покоится, нить образует с вертикалью угол $\alpha=60°$ и ускорение тела в начальный момент равно $a=0{,}5$ м/с^2. Массой блока и трением пренебречь.

5. Космический корабль разгоняется с помощью ионного реактивного двигателя, выбрасывающего двухвалентные ионы кислорода O_{16}^{++}, ускоренные напряжением $U=500$ кВ. Ток ионного пучка $I=2$ кА, масса корабля $M=200$ кг. Найдите ускорение корабля. Элементарный заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, атомная единица массы $m_0=1{,}7\cdot10^{-27}$ кг.

6. Если некоторое количество идеального газа перевести из состояния *1* в состояние *2*, нагревая его сначала изобарически, а затем изохорически, то газ совершает работу A_1. Если же переход осуществить непосредственно по прямой на p,V-диаграмме, то работа газа $A_2=nA_1$, где $n=1{,}5$. Найдите давление газа в состоянии *2*, если его давление в состоянии *1* равно $p_1=150$ кПа.

7. Гибкий проволочный контур сопротивлением $R=0{,}15$ Ом и площадью $S_1=300$ см^2 расположен перпендикулярно линиям однородного магнитного поля с индукцией $B_1=0{,}06$ Тл. При изменении индукции поля до $B_2=0{,}08$ Тл и одновременном изменении площади контура по нему прошел заряд $|q|=6$ мКл. Найдите новое значение площади контура.

8. К источнику тока подключен колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки с индуктивностью $L=0{,}04$ Гн и сопротивлением обмотки $R=2$ Ом (рис. 1). После размыкания ключа K в контуре возникают медленно затухающие колебания, при этом в обмотке выделяется средняя тепловая мощность $P=0{,}2$ Вт. Какое количество теплоты выделится в обмотке до полного затухания колебаний?

9. Прямолинейный стержень длиной $l=1$ м подвешен на двух одинаковых пружинах в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}2$ Тл. По стержню пропускают кратковременный импульс тока $I=500$ А в течение времени $\tau=0{,}01$ с, в результате чего стержень приобретает скорость, направленную вертикально. Определите наибольшую величину смещения стержня при его последующем движении. Смещением стержня за время τ пренебречь. Коэффициент упругости каждой пружины $k=20$ Н/м, масса стержня $m=0{,}4$ кг.

10. Проводник массой $m=0{,}2$ кг и длиной $l=0{,}6$ м лежит на горизонтальных рельсах, расположенных в горизонтальном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл (рис. 2). При пропускании по проводнику тока $I=20$ А в указанном на рисунке направлении для того, чтобы сдвинуть проводник влево, требуется приложить горизонтальную силу $F_1=0{,}5$ Н. Какая сила потребуется при направлении тока, противоположном указанному?

Публикацию подготовили
М. Н. Стриханов, В. Е. Чижов, Н. В. Шолохов

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сумма пяти начальных членов арифметической прогрессии меньше суммы ее последующих пяти членов на 50. На сколько десятый член прогрессии больше ее второго члена?

2. Найдите критические точки функции

$$f(x)=\sin 2x+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\lg x}+\sqrt{25-\lg x}\leqslant 7.$$

4. Площадь прямоугольного треугольника равна P, а площадь круга, вписанного в него, равна Q. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x^2+xy=1,\\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2}.\end{cases}$$

6. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через точки B, C и A' проведено сечение, площадь которого равна S, а расстояние от плоскости сечения до вершины B' равно h. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2 2x=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

2. Найдите отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к пятнадцатому ее члену, если сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40 % суммы ее начальных двенадцати членов.

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{(3x+1)}\frac{x-2}{x-4}}.$$

4. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1?

5. Найдите все решения системы

$$\begin{cases}5x^2+8xy+4y^2=4+4x,\\ \sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi y)=0.\end{cases}$$

6. На координатной плоскости заданы точки $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(2;0)$, $C(4;0)$. Найдите координаты $(x;y)$ точки M такой, что угол OMA равен углу CMB, а угол MAO равен углу MBC.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости (рис. 1). Коэффициент трения цилиндра о плоскость μ. При каком максимальном значении угла α цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости?

2. Шарик массой m подвешен при помощи двух пружин, жесткости которых k_1 и k_2 (рис. 2). Найдите частоту колебаний шарика. Изменится ли частота, если пружины поменять местами?

3. В сосуд с водой, объем которой $V_1=0{,}25$ л, а температура $t_1=20$ °C, поместили $m_2=50$ г расплавленного свинца, имеющего температуру $t_2=400$ °C. Какая температура установится в результате теплообмена? Какая часть воды останется в сосуде? Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), температура плавления свинца $t_{пл}=327$ °C, его удельная теплота плавления $\lambda=0{,}226\cdot10^5$ Дж/кг, удельные теплоемкости расплава и твердого свинца считать одинаковыми и равными $c_2=1{,}3\times\times10^2$ Дж/(кг·К). Потерями тепла пренебречь.

4. Частица, имеющая заряд q, разгоняется до энергии W и влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Заряд конденсатора Q, его емкость C, расстояние между пластинами d. Первоначально частица находится на одинаковом расстоянии от пластин. Какой длины должна быть каждая пластина, чтобы частица не упала на ее поверхность?

5. Фотограф хочет снять финиш бега спортсменов с боку. Расстояние от объектива фотоаппарата до ближайшего бегуна $d=10$ м. Фокусное расстояние объектива $F=100$ мм. Размытость контуров изображения на фотопленке не должна превышать $\Delta l=0{,}1$ мм. Оцените время экспозиции, если спортсмены финишируют со скоростью около $v=10$ м/с.

6. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла $\lambda_{max}=2750$ Å. Чему равно минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект?

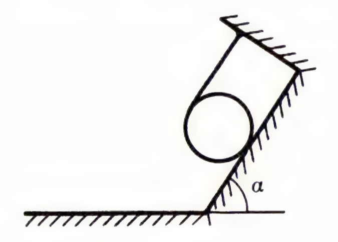


Рис. 1.

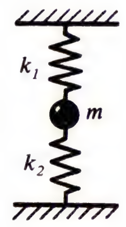


Рис. 2.

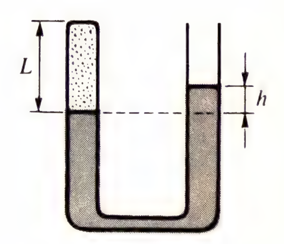


Рис. 3.

Вариант 2

1. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны друг другу по модулю. Найдите угол отклонения нити в крайнем положении.

2. Материальная точка движется так, что ее координаты со временем изменяются по законам: $x=a\sin\omega t$, $y=a\cos 2\omega t$. Найдите уравнение траектории точки и закон изменения ее модуля скорости от времени.

3. Полагая, что воздух (M=29 кг/кмоль) состоит в основном из кислорода ($M_1=$ $=32$ кг/кмоль) и азота ($M_2=28$ кг/кмоль), определите процентное содержание этих газов в атмосфере.

4. В U-образной трубке высота столба воздуха в запаянном левом колене $L=300$ мм, а избыточная высота столба ртути в открытом правом колене $h=110$ мм (рис. 3). В правое колено долили столько ртути, что ее уровень поднялся на $\Delta h=40$ мм. На сколько поднялся уровень в левом колене? Атмосферное давление $p_{\text{а}}=760$ мм рт. ст.

5. К источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом подключена система из 4-х резисторов сопротивлением $R=1$ Ом каждый. Как нужно соединить эти резисторы, чтобы в них выделилась максимальная мощность?

6. Предмет находится на расстоянии L от экрана. Между ними расположена собирающая линза с фокусным расстоянием F. Перемещением линзы можно получить на экране как увеличенное, так и уменьшенное изображение. Найдите отношение размеров изображений в обоих случаях.

Публикацию подготовили
А. С. Бортаковский, Г. Г. Спирин

5. В равнобочной трапеции лежат две касающиеся окружности радиусами R, каждая из которых касается обоих оснований и одной из боковых сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях. Найдите стороны трапеции.

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}=x^2-6x+7.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+1}=0.$$

2. На предприятии работают 3 машинистки разной квалификации. Первая печатает в час на 2 страницы больше, чем вторая, у третьей на печатание страницы уходит на 4 минуты больше, чем у первой и в 4/3 раза больше времени, чем у второй. Сколько страниц в час печатает первая машинистка?

3. Решите уравнение $\sin^4 x-\cos^4 x=1$.

4. Решите уравнение

$$10^{(6\log_x 10)^2-13}\cdot x^{\lg x}=1.$$

5. В треугольнике ABC сторона AC равна 26, а медианы, проведенные из вершин A и C, равны соответственно 36 и 15. Найдите третью медиану.

6. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство

$$\sin^5 x+\cos^5 x-a(\sin x+\cos x)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{a^2-11}{2}(\sin x+\cos x)\sin x\cos x$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{2}{3x+2}\leqslant\frac{4}{5x+4}-\frac{3}{4x+3}.$$

2. Бассейн можно наполнить водой с помощью 2-х насосов, если первый работает 4 минуты, а второй — 3 минуты. Время наполнения бассейна с помощью одного первого насоса на 3 минуты меньше, чем с помощью одного второго. Найдите эти времена.

3. Решите уравнение

$$(\sin 2x-\cos 2x)^2+\sin 6x=1.$$

4. Решите уравнение

$$x^{\log_3^2 x-1+\log_{(1/3)} x}=x^{3-\log_3 x}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. С какой скоростью и в каком направлении должен лететь самолет, чтобы за время $t=2$ ч пролететь точно на север путь $l=300$ км, если во время полета дует северо-западный ветер под углом $\alpha=30^\circ$ к меридиану со скоростью $v_{\text{в}}=27$ км/ч?

2. Медный шар массой $m=20$ кг падает в воде, увлекая за собой скрепленный с ним нитью стальной шар той же массы. Определите ускорение шаров и натяжение нити. Плотность меди $\varrho_{\text{м}}=8{,}9$ г/см^3, стали $\varrho_{\text{c}}=7{,}8$ г/см^3, воды $\varrho_{\text{в}}=1$ г/см^3. Считать нить идеальной. Силами сопротивления воды пренебречь.

3. Найдите первую космическую скорость для планеты, масса которой в 3 раза больше массы Земли. Радиус планеты больше земного в 2 раза. Принять первую космическую скорость для Земли равной $v_{\text{I}}=8$ км/с.

4. Два цилиндрических сосуда соединены у дна тонкой трубкой с краном (рис. 1). Один сосуд имеет сечение $S_1=15$ см^2 и заполнен ртутью до высоты $h_1=20$ см; второй сосуд сечением $S_2=5$ см^2 заполнен ртутью до высоты

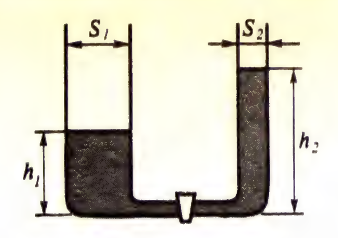


Рис. 1.

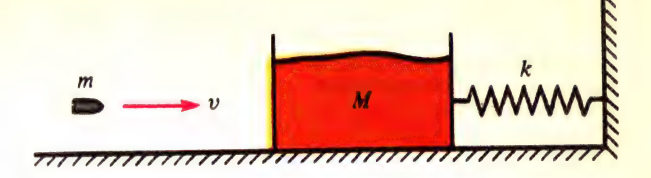


Рис. 2.

$h_2=40$ см. Каков будет уровень ртути в сосудах, какое количество теплоты выделится и на сколько возрастет температура ртути, если открыть кран в соединительной трубке? Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3, ее удельную темплоемкость принять равной $c=0{,}08$ Дж/(г·К). Теплоемкостью сосудов и потерями тепла пренебречь.

5. Воздушный шар, имеющий легкорастяжимую теплоизолированную оболочку массой $m_1=130$ кг, заполнен воздухом массой $m_2=65$ кг при давлении и температуре окружающей атмосферы. На сколько градусов нужно нагреть воздух внутри шара, чтобы он взлетел? Температура атмосферного воздуха $t_0=0$ °С.

6. Суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, сопротивления которых $R_1=10$ Ом и $R_2=3$ Ом, одинакова при последовательном и параллельном соединениях резисторов. Найдите внутреннее сопротивление источника тока, питающего эти резисторы.

7. Кусок провода длиной $l=8$ м складывается вдвое и концы его замыкаются. Затем провод растягивается в квадрат в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}2$ Тл. Какой заряд пройдет по проводу, если его сечение $S=0{,}1$ мм^2, а удельное сопротивление материала провода $\rho=0{,}2$ мкОм·м?

8. Пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v=200$ м/с, попадает в покоящийся ящик с песком массой $M=2$ кг, лежащий на гладком горизонтальном столе, и застревает в нем. К ящику прикреплен один конец пружины жесткостью $k=2$ Н/см (рис. 2). Скорость пули направлена вдоль оси пружины. Определите амплитуду колебаний ящика.

9. На какой высоте находится воздушный шар, если с холма высотой $h=200$ м он виден под углом $\alpha=30°$ к горизонту, а его отражение в озере видно с этого холма под углом $\beta=60°$ вниз от горизонтали?

10. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=5$ см на расстоянии $d=10$ см от нее. По другую сторону линзы находится плоское зеркало, расположенное под углом $\alpha=30°$ к главной оптической оси. Зеркало пересекает ось на расстоянии $a=4$ см от линзы. На каком расстоянии от оси будет находиться изображение источника, даваемое такой оптической системой?

Публикацию подготовили
В. В. Варфоломеев, М. Н. Данильычева, М. А. Красненков, И. М. Матусевич

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите

$$\frac{\left(13{,}75+9\frac{1}{2}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}.$$

2. Упростите и вычислите при $x=1{,}33$

$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1}+\frac{2}{x^{-1/2}}.$$

3. Вычислите $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3\frac{3}{7}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4. Вычислите $\left(7^{\frac{2}{\log_b 7}+1}\right)\cdot b$ при $b=\sqrt[3]{2}$.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-x}+x=1.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Печь нагревается равномерно. Через 0,5 часа после начала нагрева температура печи была 500 °С, а еще через 1 час — 900 °С. Какова была первоначальная температура печи?

7. Решите неравенство

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}<0.$$

В ответе запишите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

8. Площадь осевого сечения конуса равна 12, а длина его образующей равна 5. Найдите отношение объема конуса к площади его боковой поверхности.

9. Определите значение параметра k, при котором корни уравнения $x^2+(k-1)x+2k-8=0$ удовлетворяют условию $2x_1-x_2=-6$, где $x_1<x_2$.

10. Решите уравнение

$$\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

11. Решите уравнение

$$4\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1.$$

В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

12. В полушар радиусом $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Найдите объем куба.

Вариант 2

1. Вычислите без таблиц

$$(3\sqrt{76}-\sqrt{57})\cdot\frac{2}{19}\sqrt{19}+\sqrt{12}.$$

2. Упростите и вычислите при $a=3$, $b=2$:

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2\cdot(a+b).$$

3. Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\cos\beta=0{,}6$; $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; $\beta\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Найдите $b^{\log_5\sqrt{7}}$, если $7^{\log_5 b}=4$.

5. Решите уравнение

$$6+\sqrt{x^2-3x+6}=2x.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди следует добавить к этому куску, чтобы получить сплав, содержащий 60 % меди?

7. Решите неравенство

$$\frac{2x^2-9x+7}{x^2-1}\leqslant 1.$$

В ответе запишите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

8. Радиус основания цилиндра в три раза больше его высоты. Во сколько раз площадь полной поверхности цилиндра больше площади его боковой поверхности?

9. Найдите сумму всех целых значений параметра a, при которых квадратный трехчлен x^2+ax+a^2+6a при всех x, удовлетворяющих условию $1<x<2$, отрицателен.

10. Решите уравнение

$$4\cdot 9^{2x}-3\cdot 4^{2x}-4\cdot 36^{x}=0.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

11. Решите уравнение

$$\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=\cos 3x-\sin x.$$

В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{9}\right]$.

12. Найдите квадрат отношения высоты конуса к диаметру основания, если конус при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело бросают вертикально вверх со скоростью $v_0=4{,}9$ м/с. Одновременно с предельной высоты, которой оно может достичь, бросают вертикально вниз другое тело с той же начальной скоростью. Определите время, по истечении которого тела встретятся. Ускорение силы тяжести $g=9{,}8$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

2. Под каким углом к направлению перемещения тела направлена сила, равная $F=20$ Н, если при перемещении тела на $s=10$ м совершена работа $A=100$ Дж? Ответ дайте в градусах.

3. Человек массой $M=64$ кг, стоя на коньках на льду, бросает горизонтально камень массой $m=4$ кг со скоростью $v=8$ м/с. Определите расстояние, на которое откатился после броска человек. Коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}01$. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

4. Определите период колебаний математического маятника, подвешенного на нити длиной $l=10$ м. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

5. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом находится газ при давлении $p_1=0{,}6\cdot 10^5$ Па, во втором — $p_2=10^5$ Па, емкость первого баллона $V_1=3\cdot 10^{-3}$ м^3, второго — $V_2=10^{-3}$ м^3. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянна, объемом трубки можно пренебречь. Ответ дайте в СИ, разделив его на 10^4.

6. Сколько времени будет происходить нагревание $m=0{,}4$ кг воды от $t=15$ °С до кипения (при нормальных условиях) с помощью двух электронагревателей мощностью $P=200$ Вт каждый, соединенных последовательно? КПД нагревателей $\eta=85$ %, удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг· К). Ответ дайте в СИ.

7. На сколько равных частей нужно разрезать однородный проводник сопротивлением $R=36$ Ом, чтобы сопротивление его частей, соединенных параллельно, было равно $R'=1$ Ом?

8. Два последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1=1$ мкФ и $C_2=2$ мкФ присоединены к источнику постоянного напряжения $U=240$ В. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C_1. Ответ дайте в СИ.

9. Определите силу, действующую на проводник длиной $l=10$ см при токе $I=10$ А в однородном магнитном поле индукцией $B=0{,}18$ Тл, если угол между проводником и магнитной индукцией $\alpha=30°$. Ответ дайте в СИ.

10. Сколько длин волн монохроматического излучения с частотой $\nu=5\cdot 10^{14}$ Гц укладывается на отрезке длиной $l=1$ мм? Скорость света $c=3\cdot 10^8$ м/с.

Вариант 2

1. С высоты $h=20$ м начало свободно падать тело. Одновременно с поверхности земли бросили вертикально вверх другое тело со скоростью $v_0=20$ м/с. На какой высоте эти тела встретятся? Ускорение силы тяжести $g=9{,}8$ м/с^2. Отсчет высоты ведите от поверхности Земли. Ответ дайте в СИ.

2. Две гири массами $m_1=0{,}5$ кг и $m_2=1{,}5$ кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Найдите величину ускорения движения гирь. Массой блока и трением в блоке пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

3. Определите силу, действующую на тело, если при его перемещении на расстояние $s=20$ м совершена работа $A=500$ Дж, а сила направлена под углом $\alpha=60°$ к направлению перемещения. Ответ дайте в СИ.

4. Из орудия, стоящего на покоящейся платформе, произвели выстрел в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m=100$ кг, скорость снаряда $v=400$ м/с. Масса платформы с орудием $M=20$ т. Определите расстояние, на которое откатилась платформа после выстрела, если коэффициент ее трения о рельсы $\mu=0{,}1$. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

5. Какой объем занимают $\nu=3$ кмоля газа при давлении $p=1$ МПа (1 МПа$=10^6$ Па) и температуре $t=100$ °С? Ответ дайте в СИ.

6. Для расплавления $m=1$ т латуни используется электропечь мощностью $P=10^5$ Вт. Сколько времени происходит плавка, если слиток нагрели до начала плавления на $\Delta t=900$ °С? Удельная теплоемкость латуни $c=386$ Дж/(кг·К). Энергетические потери отсутствуют. Удельная теплота плавления латуни $\lambda=2\cdot10^5$ Дж/кг. Ответ дайте в СИ.

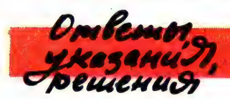
7. Батарея гальванических элементов с ЭДС $\mathcal{E}=15$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом замкнута проводником, имеющим сопротивление $R=10$ Ом. К зажимам батареи подключен конденсатор емкостью $C=1$ мкФ. Определите величину заряда на конденсаторе. Ответ дайте в мкКл (1мкКл$=10^{-6}$ Кл).

8. Найдите силу взаимодействия двух зарядов величиной $q=1$ Кл каждый, расположенных на расстоянии $r=1$ км друг от друга. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2). Ответ дайте в СИ.

9. Два иона, имеющие одинаковые заряды и одинаковые кинетические энергии, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион описал окружность радиусом $r_1=3$ см, а второй — $r_2=1{,}5$ см. Определите отношение масс первого иона и второго.

10. Светящаяся точка расположена внутри двугранного угла, образованного двумя плоскими зеркалами, при этом она находится на расстоянии $a=22$ см от линии пересечения зеркал и на расстоянии $b=2$ см от одного из зеркал. Определите угол, образованный зеркалами, если известно, что расстояние между мнимыми изображениями точки $l=22$ см. Ответ дайте в градусах.

Публикацию подготовили *М. Ю. Дигилов, Л. Ф. Еремич, А. Л. Розенталь, Е. А. Шведов*



Геометрические преобразования
Часть II: Преобразования подобия

1. 45°. Указание. Примените центрально-подобный поворот $\Pi_A^{k,\varphi}$, где $\varphi=\angle BAC$ и $k=\sqrt{2}$.
2. Гомотетия с центром C и коэффициентом k.
3. 90°, 45°, 45°. Указание. Данная композиция есть тождественное преобразование.
4. 45°, 60°, 75°. Указание. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно, $\angle AMB=\varphi_1$, $\angle APC=\varphi_2$, $\angle BNC=\varphi_3$, $k_1=AM/BM$, $k_2=CP/AP$, $k_3=BN/CN$. Докажите, что композиция

$$\Pi_N^{k_3,\varphi_3}\circ\Pi_P^{k_2,\varphi_2}\circ\Pi_M^{k_1,\varphi_1}$$

есть тождественное преобразование.
5. Указание. Пусть O — середина стороны AC треугольника ABC. Установите, что треугольники OMP и OCQ подобны. Примените центрально-подобный поворот с центром O.
6. Указание. Пусть $ABCD$ — положительно ориентированный четырехугольник и O — середина его диагонали AC. Установите, что центрально-подобный поворот $\Pi_O^{k,\varphi}$, где $k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi=90°$, переводит отрезок MN в отрезок PQ.
7. Указание. Докажите, что $\Pi_B^{\cos\gamma,\varphi}\times\Pi_A^{1/\cos\gamma,\varphi}=R_K^{2\varphi}$, где $\varphi=90°-\gamma$.
8. $\angle BAK=\angle ABK=\gamma$.
9. Указание. Установите, что $\angle PQN=\angle PCN$ и $\angle QPM=\angle QCM$.
10. 2α, 2β, 2γ.
11. 45°.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $(-2;\ 2)$.
2. $-2+\sqrt{1/10}$.
3. $2\operatorname{arctg}(\sqrt{15}-2\sqrt{3})$. Указание. Заметим, что $\angle ABC$ — тупой. Пусть $\alpha={}^1/_2\angle ABC$, а X и Y — точки касания окружностей с прямой AB. Тогда $XY=XB+BY=3r\operatorname{ctg}(\pi-2\alpha)+r\operatorname{ctg}\alpha=2r\sqrt{3}$.
4. $\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Указание. Перенесите второе слагаемое в правую часть и вычислите синусы левой и правой частей.
5. $x=\sqrt{20}$, $y=\sqrt{13}$, $V=8$. Указание. Объем пирамиды максимален, когда максимальна ее высота, опущенная из вершины S, т. е. когда эта высота совпадает с высотой треугольника SAB, опущенной на сторону AB.

Вариант 2

1. $y=-\dfrac{1}{4}(x-1)^2$.
2. $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
3. 117/2. Указание. Центр O окружности лежит на середине гипотенузы AB, а радиус R

равен 13/2. Разобьем четырехугольник $AEFG$ на треугольники радиусами OA, OE, OF, OG и подсчитаем его площадь как сумму площадей треугольников: $\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R^2\sin\alpha+$ $+\frac{1}{2}R^2\sin(\pi-\alpha)$, где $\alpha=\angle AOE$. Поскольку $\angle AOE=\angle ABC$, то $\sin\alpha=\frac{5}{13}$.

4. См. ответ к задаче 2 варианта 1.

5. $\sqrt{91}/24$. Указание. Пусть плоскость, определяемая точками K_2, L_2, E, пересекает отрезок AA_1 в точке A_3, отрезок AL — в точке E_2, а треугольник $A_1B_1C_1$ пересекает по отрезку MN. Пусть также X, Y, Z — середины отрезков K_2L_2, EE_2, MN соответственно. В плоскости AKK_2 находим $AA_3=\frac{1}{3}$, $A_1A_3=\frac{2}{3}$, $A_1M=A_1N=MN=\frac{1}{2}$, $A_3M=\frac{5}{6}$. Так как $FX=$ $=EY=\frac{1}{8}$, то $EF\parallel XY$ и искомый отрезок — средняя линия треугольника A_3MZ.

Вариант 3

1. $\{(\log_7(\sqrt{13}+4);\ \log_4(\sqrt{13}-1)\}$.

2. $\pi-\arcsin\frac{2}{5}$.

3. $AC=6$, $AB=2\sqrt{105}$, $BC=4\sqrt{21}$. Указание. Пусть O — точка пересечения медиан, $\alpha=\angle MON$, $x=ON$, $y=OM$. Тогда $AN-CM=$ $=3x-3y=3$. Очевидно, $S_{CON}=\frac{1}{6}S_{ABC}=$ $=4\sqrt{5}$. С другой стороны, $S_{CON}=\frac{1}{2}x\times$ $\times 2y\cdot\sin(\pi-\alpha)$. Если α — острый угол, то $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $x=4$, $y=3$, треугольник ABC тупоугольный. Если же α — тупой угол, то получается остроугольный треугольник.

4. $a=-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 0. Указание. Если $a=0$, то имеем целое решение $x=1$. Пусть $a\neq 0$ и m, n — целые решения квадратного уравнения. По формулам Виета числа $-\frac{3}{a}$, $2a-\frac{3}{a}$ — целые, поэтому $k=2a$ — целое, $\frac{3}{a}=\frac{6}{k}$ — целое, $k=\pm1$, ±2, ±3, ±6. Перебор случаев дает ответ.

5. $5\sqrt{3}/12$. Указание. Пусть P — середина отрезка B_1M, Q — середина AK. Плоскости пересекают призму по четырехугольникам $CKPL$ и $CMQN$. Искомый объем равен разности призмы и двух объемов усеченной пирамиды.

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $-\operatorname{arcctg}3+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. $(-\infty;\ \log_{2/3}(4+\sqrt{5})]\cup[\log_{2/3}(4-\sqrt{5});\ 1]$. Указание. Выполните замену $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

3. $\sqrt{33}-1$. Указание. Биссектриса угла C должна пересекать сторону AD в некоторой точке L. Пусть $\gamma=\angle ADM$, K — точка пересечения MD и CL. Пусть еще $MQ\parallel AD$, $DQ\parallel CL$. Если $x=AD$, $y=MD$, то $S_{AMD}=\frac{1}{2}xy\sin\gamma$. Так как $LD=4$, $MQ=2+x$ и треугольники LKD, QDM подобны, то $\frac{KD}{4}=\frac{y}{2+x}$. Значит, $S_{LKD}=$ $=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{4y}{2+x}\sin\gamma$. Из равенства $2S_{LKD}=$ $=S_{AMD}$ получаем ответ.

4. $\{(3\sqrt{2};\ -3+3\sqrt{2});\ (-3\sqrt{2};\ -3-\sqrt{2})\}$. Указание. Складывая данные неравенства, получаем, что $x-y-3=0$. Подставляя $x=y+3$ в исходные неравенства, получаем равенство $y^2+6y-9=0$.

5. $8\sqrt{7}/7$. Указание. Если K, L, M — точки касания шара и ребер AA_1, BB_1, DD_1 соответственно, O — центр шара, E — точка пересечения диагоналей ромба, N — ее проекция на плоскость KLM, то $AK=AC=8$, $BL=BC=$ $=5=DM=EN$, $LM=BD=6$. Пусть R — радиус шара, тогда из прямоугольного треугольника QNM имеем $ON=\sqrt{R^2-9}$, $KN=R-$ $-\sqrt{R^2-9}$. Пусть точка F лежит на ребре AK и $EF\parallel KN$. Так как $AF=AK-EN=3$, $EF=$ $=KN=R-\sqrt{R^2-9}$, по теореме Пифагора для треугольника AEF находим радиус R.

Вариант 5

1. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

2. См. ответ к задаче 2 варианта 3.

3. 81/10. Указание. Пусть $\angle CAD=\alpha$. Воспользуйтесь равенством $AD=D+CE$.

4. $[-4;\ 0]$. Указание. Подкоренные выражения равны $(2\pm y)^2$, где $y=\sqrt{-x}$.

5. $5\sqrt{11}/4$. Указание. Если SO — высота пирамиды $SABC$, то O — середина гипотенузы BC. Из прямоугольного треугольника SOB находим $SO=\sqrt{11}$. Пусть QR — высота пирамиды $QBCN$. Тогда $QR\parallel SO$ и $SR=\frac{5}{4}SO$. Искомый объем получается вычитанием из объема пирамиды $QBCN$ объемов пирамид $PBCN$ и $QCMP$.

Физика

Вариант 1

1. Накопленный за время τ импульс растрачивается за время t:

$$(F-F_{\text{тр}})\tau=F_{\text{тр}}t.$$

Отсюда

$$F_{\text{тр}}=F/(1+t/\tau).$$

2. Поток магнитной индукции через рамку не меняется, поэтому сопротивления R_2 и R_3 оказываются включенными параллельно. По закону Фарадея

$$\mathscr{E}_{\text{инд}}=Blv.$$

Таким образом, для тока, идущего через ам-

перметр, по закону Ома получаем

$$I_A = \frac{Blv}{R_1 + R_2R_3/(R_2+R_3)}.$$

3. Пружина начинает приподнимать груз, когда $kx_0 = mg$, где x_0 — удлинение пружины к этому моменту. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вверх со скоростью v. В этой системе грузик в момент отрыва от стола движется вниз со скоростью v. Пусть x — максимальное удлинение пружины, тогда относительно низшей точки потенциальная энергия грузика в этот момент равна $mg(x-x_0)$. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} + mg(x-x_0) + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Отсюда, с учетом того, что $x_0 = mg/k$, получаем уравнение

$$kx^2 - 2mgx - mv^2 + m^2g^2/k = 0.$$

Решение этого уравнения однозначно, так как $x > x_0$:

$$x = \frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

4. Кинетическая энергия пули $mv^2/2$ идет на увеличение внутренней энергии сжатого внутри ствола воздуха $(3/2)\,\nu R\,(T-T_0)$(для простоты воздух считаем идеальным одноатомным газом). Поскольку $T \gg T_0$, на уровне оценки из закона сохранения энергии следует

$$mv^2 \sim 3\nu RT.$$

(Потерями тепла из-за быстроты процесса можно пренебречь.) По закону Менделеева — Клапейрона

$$p_0lS = \nu RT_0.$$

Таким образом,

$$T \sim \frac{mv^2T_0}{3p_0lS}.$$

При $m \sim 10$ г, $v \sim 7\cdot10^2$ м/с, длине ствола $l \sim 1$ м, сечении его $S \sim 10^{-4}$ м^2, $p_0 = 10^5$ Па, $T_0 \sim 300$ К получаем

$$T \sim 5\cdot10^4 \text{ К}.$$

5. Лампа $Л_2$ гаснет, когда мост практически уравновешен (см. рисунок к условию задачи). Так как до этого она горела, значит, сопротивление ламп $Л_1$ и $Л_3$ не равно R, а меньше (по мере нагрева включенных ламп их сопротивление с температурой растет). Таким образом, вначале ток идет по пути наименьшего сопротивления — через три лампы. А поскольку лампа $Л_2$ загорается первой, ее начальное сопротивление должно быть самым большим.

Вариант 2

1. $T = \dfrac{5M_2}{4M_1}T_0 = 362$ К.

2. На пути $x \leqslant l$ сила трения $F_{тр} = \mu mgx/L$, а работа силы трения $A = \mu mgx^2/(2L)$, т. е. до выхода передней грани пластины за полосу совершается работа

$$A_1 = \mu\frac{mgl^2}{2L}.$$

При $l \leqslant x \leqslant s$ сила трения $F_{тр} = \mu mgl/L$, а работа силы трения $A = \mu mgl\,(x-l)/L$, т. е. на второй части пути совершается работа

$$A_2 = \mu mg\frac{l}{L}(s-l).$$

Используя закон сохранения энергии, получаем

$$A = A_1 + A_2 = \mu mg\frac{2s-l}{2L}l = \frac{mv}{2},$$

откуда

$$\mu = \frac{v^2L}{gl(2s-l)}.$$

3. Заряд на конденсаторах вначале одинаков и равен

$$q_а = \mathscr{E}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.$$

Начальная энергия конденсаторов

$$W_а = \frac{q_а^2}{2}\frac{C_1+C_2}{C_1C_2} = \frac{\mathscr{E}^2C_1C_2}{2(C_1+C_2)}.$$

После переключения

$$q_б = 2q_а = 2\mathscr{E}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.$$

Конечная энергия конденсаторов

$$W_б = \frac{q_б^2}{2(C_1+C_2)} = \frac{4\mathscr{E}^2C_1^2C_2^2}{2(C_1+C_2)^3}.$$

Выделившаяся энергия по закону сохранения энергии равна

$$Q = W_а - W_б = \frac{\mathscr{E}^2C_1C_2}{2(C_1+C_2)^3}\left((C_1+C_2)^2 - 4C_1C_2\right) = \frac{\mathscr{E}^2C_1C_2(C_1-C_2)^2}{2(C_1+C_2)}.$$

4. Давление в одну атмосферу соответствует высоте водяного столба $H_в = 10$ м ($\rho_вgH_в = p_а = 1$ атм). При перепаде давлений $\Delta p = p - p_а = 0{,}5$ атм получится высота фонтана

$$h = H_в/2 = 5 \text{ м}.$$

Действительно, полагая сечения струи внизу и вверху примерно одинаковыми, имеем

$$\Delta p \sim \rho_вv^2/2 \sim \rho_вgh.$$

Отсюда

$$h = \frac{\Delta p}{\rho_вg} \sim \frac{\rho_вgH_в/2}{\rho_вg} = \frac{H_в}{2} = 5 \text{ м}.$$

5. Когда виток охватывает трансформатор снаружи, магнитный поток через него равен нулю, и виток на трансформатор не влияет. Если замкнутый виток проходит внутри трансформатора, охватывая железный сердечник, в витке возникает переменный магнитный поток, создающий значительный (из-за малости омического сопротивления витка) ток, который, в свою очередь, стремится скомпенсировать (по закону Ленца), почти занулить магнитный поток в сердечнике. Это приводит к заметному уменьшению индуктивности первичной обмотки и, следовательно, к снижению ее индуктивного сопротивления. В результате ток через лампу увеличивается, и накал возрастает.

Вариант 3

1. Шарики, обладавшие вначале зарядами разных знаков: q_1 и $-q_2$, после разлета несут один и тот же заряд $q=(q_1-q_2)/2$. Соотношение между силами отталкивания и притяжения —

$$k\frac{q^2}{l^2}=\frac{1}{8}\frac{q_1q_2}{l^2},$$

отсюда приходим к уравнению

$$x^2-(5/2)\,x+1=0,$$

где $x=q_1/q_2$.

Решая это уравнение, получаем два ответа:

$$q_1/q_2=2 \text{ и } q_1/q_2=1/2,$$

т. е. заряд одного шарика в два раза больше другого.

2. Критическое условие прохождения пули сквозь доску (как закрепленную, так и незакрепленную) — выделение в доске тепловой энергии $Q=mv_0^2/2$. В случае незакрепленной доски конечные скорости доски и пули совпадают. Пусть эта скорость равна u. Тогда из закона сохранения импульса

$$mv=(m+M)\,u$$

и закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{(m+M)\,u^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2}$$

получаем

$$v=v_0\sqrt{(m+M)/M}.$$

3. См. решение задачи Ф1155, которое будет опубликовано позже.

4. См. решение задачи Ф1153, которое будет опубликовано позже.

5. См. решение задачи Ф1156, которое будет опубликовано позже.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $\{1\}$.

2. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{a}+\pi k$, $k\in Z$ при $a\in(-\infty;\,-1]\cup\cup[1;\,+\infty)$; $\{\varnothing\}$ при $a\in(-1;\,1)$. Указание. Приведите уравнение к равносильному ему уравнению $\cos 2x=\frac{1}{a}$, $a\neq 0$.

3. 1791. Указание. Пусть $A=\overline{xyz1}$ — искомое число (x, y, z — цифры). По условию числа $\overline{xy}=10x+y$, z, 1 образуют арифметическую прогрессию с некоторой разностью d. Поэтому $z=1+d$, $10x+y=1+2d$. Из этих равенств следует, что $5\leqslant d\leqslant 8$. Осталось перебрать возможные значения d.

4. $S_1=\frac{1}{2}\,l\cos^2\beta\sin 2\alpha$,

$S_2=\frac{3}{4}\,l^2\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\sin^2\alpha}$,

$S_3=\frac{3}{4}\,l^2\cos\beta\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\cos^2\alpha}$

при $\alpha\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$. Указание.

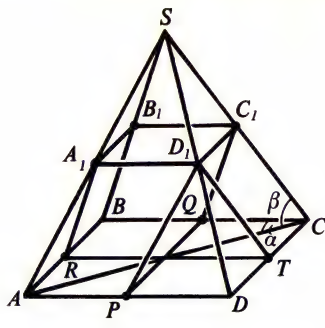


Рис. 1.

Пусть $SABCD$ — данная пирамида, точки A_1, B_1, C_1, D_1, P, R, Q, T — середины ее ребер (рис. 1). Всего имеется 5 сечений пирамиды, плоскости которых равноудалены от ее вершин. Три из них показаны на рисунке. Это прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, трапеция PD_1C_1Q и, наконец, трапеция RA_1D_1T. Остальные сечения на рисунке не показаны (они симметричны рассмотренным трапециям). После этих замечаний вычисление требуемых площадей не представляет труда.

Вариант 2

1. $(-\infty;\,-6]\cup(-2;\,+\infty)$.

2. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; $2\pi n$, $n\in Z$ при $c=85$. Решений нет при $c\neq 85$. Указание. Выполните подстановку $u=6^{-\sin x}$, $v=7^{\cos y}$. Ясно, что $\frac{1}{6}\leqslant u\leqslant 6$, $\frac{1}{7}<v\leqslant 7$. Первому из уравнений системы удовлетворяют лишь $u=6$, $v=7$.

3. При $35\leqslant c<215/6$ в четвертом сосуде концентрация кислоты больше, чем в третьем, при $215/6<c\leqslant 37$ — концентрация в третьем сосуде больше, чем в четвертом. При остальных c решений нет. Указание. Пусть x и y количества литров раствора, отлитого соответственно из первого и второго сосудов в третий сосуд. Тогда

$$\begin{cases} x+y=10,\\ 3x+4y=c,\end{cases}$$

причем $0<x\leqslant 5$, $0<y\leqslant 7$, и поэтому $35\leqslant c\leqslant 37$.

Вычисляя концентрацию d кислоты в четвертом сосуде, получим $d=215-5c$.

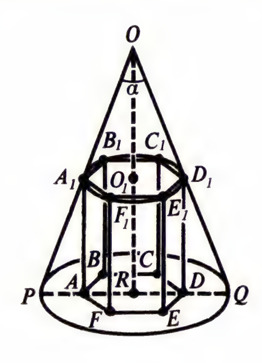


Рис. 2.

4. $V=\frac{3\sqrt{3}}{2}l^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(2-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3}$

при $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$. При $\alpha\in\left[\frac{\pi}{3};\pi\right)$ задача не имеет решения.

Указание. Рассмотрите осевое сечение OPQ конуса (рис. 2). Пусть $x=AA_1$. Выражая через данный угол α и x площадь полной поверхности призмы $S(x)$, получим

$S(x)=3\sqrt{3}\left(l\sin\frac{\alpha}{2}-x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2+6x\left(l\sin\frac{\alpha}{2}-\right.$ $\left.-x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$, так что $S(x)$ — квадратный трехчлен относительно x с коэффициентом a при x^2, равным $a=3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-6\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Осталось найти максимальное значение функции $S(x)$ на интервале $\left(0;\ l\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, где $\alpha\in(0;\pi)$. При этом оказывается, что при $a\geqslant 0$ максимум $S(x)$ внутри указанного интервала не достигается, а при $a<0$ (т. е. при $0\leqslant\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$) требуемый максимум достигается при $x=l\cos\frac{\alpha}{2}\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}{2-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}$.

Физика

1. $v_0=\sqrt{lg\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-2\cos\alpha+2\right)}=5$ м/с.
2. $Q=m_2v_0\sqrt{2gh}-m_2(m_2/m_1+1)gh\approx 91{,}3$ Дж.
3. $v_0=\sqrt{2\mu g(l-h+(M/m)(l/2-h))}=3{,}5$ м/с.
4. $v=\sqrt{\frac{2ah}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)}\approx 1{,}07$ м/с.
5. $a=\frac{4I}{M}\sqrt{\frac{m_0U}{e}}\approx 3$ м/с^2.
6. $p_2=(2n-1)p_1=300$ кПа.
7. $S_2=\begin{cases}\frac{B_1S_1+|q|R}{B_2}=3{,}4\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2, & \text{если } q>0,\\ \frac{B_1S_1-|q|R}{B_2}=1{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2, & \text{если } q<0.\end{cases}$
8. $Q=PL/R=4$ мДж.
9. $x_m=IBl\tau/\sqrt{2km}=0{,}25$ м.
10. $F_2=F_1\frac{mg+IBl}{mg-IBl}=2$ Н.

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. На 16.
2. $\frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$.
3. $[1;\ 10^9]\cup[10^{16};\ 10^{25}]$. Указание. Выполните замену $y=\sqrt{\lg x}$ и решите полученное неравенство относительно y.
4. $(\pi P-Q)^2/4Q$. Указание. Пусть x, y — катеты треугольника, R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей, соответственно. Гипотенуза длиной $2R$ делится точкой касания к вписанной окружности на два отрезка, длины которых $x-r$ и $y-r$. Поэтому $x+y-2r=2R$, или $x+y=2(R+r)$. Возведя обе части уравнения в квадрат и заменяя произведение xy удвоенной площадью треугольника, получим

$$x^2+y^2+4P=4(R+r)^2,$$

откуда

$$R=\frac{P-r^2}{2r}.$$

5. $\{(-(1+\sqrt{3})/2;\ 2);\ ((\sqrt{3}-1)/2;\ 2)\}$. Указание. Запишем уравнения системы следующим образом:

$$\begin{cases}2x^2+yx-1=0,\\ 2\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)^2+y\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)-1=0.\end{cases}$$

Каждое уравнение системы представляет собой квадратное уравнение вида $2z^2+yz-1=0$, первое — относительно $z=x$, второе — относительно $z=-\frac{3x}{2(1-x)^2}$. Поэтому либо $x=-\frac{3x}{2(1-x)^2}$, либо $x\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)=-\frac{1}{2}$.

6. Sh. Указание. Плоскость делит призму на два многогранника. Соединив их так, чтобы точки A, B, C одного многогранника совпали с точками A', B', C' другого, получим наклонную призму, площадь основания которой равна S, а высота h. Поэтому ее объем, также как и объем исходной прямой призмы равен Sh.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{6}(6k+5)$, $k\in\mathbf{Z}$.
2. 2,5.
3. $(-1/3;\ 0)\cup(4;\ \infty)$. Указание. При решении неравенства $\log_{3x+1}\frac{x-2}{x-4}\geqslant 0$ необходимо рассмотреть 2 случая: $0<3x+1<1$ и $3x+1>1$.
4. $4\sqrt{3}/27$. Указание. Если x — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания, то $V(x)=\frac{2}{3}\sin x\cos^2 x$. Исследования на максимум функции $V(x)$ удобно свести к исследованию многочлена $f(y)=y(1-y^2)$ ($y=\sin x$, т. е. $0\leqslant y\leqslant 1$).
5. $\{(4;\ -5);\ (0;\ -1);\ (4;\ -3);\ (0;\ 1)\}$. Указание. Из второго уравнения следует, что x и y — целые числа, а из первого, что $(x+y)^2=2-\frac{1}{4}(x-2)^2$, откуда $(x+y)^2\leqslant 2$, т. е. сумма $x+y$ может принимать одно из трех значений — 0, 1, —1.
6. $(-4/3;\ 8/3)$; $(4/5;\ 8/5)$. Указание. Треугольники AMO и BMC подобны. Поэтому $\frac{MC}{OM}=\frac{MB}{MA}=\frac{BC}{AO}$. Выражая длины отрезков через координаты $(x;\ y)$ точки M, получим систему уравнений, из которой и найдем $(x;\ y)$.

Физика

Вариант 1

1. $\alpha_{max}=\operatorname{arctg} 2\mu$.

2. $\omega=\sqrt{(k_1+k_2)/m}$; при перемене мест пружин частота колебаний не изменится.

3. $t=\dfrac{\varrho_1 V_1 c_1 t_1+m_2(c_2 t_2+\lambda)}{\varrho_1 V_1 c_1+m_2 c_2}\approx 24\ °C$

(здесь $\varrho_1=10^3$ кг/м^3 — плотность воды); исходная масса воды не изменилась.

4. $l<d\sqrt{2CW/(qQ)}$.

5. $\tau\leqslant \Delta l(d-F)/(vF)\approx 10^{-3}$ с.

6. $E_{min}=hc/\lambda_{max}=7,2\cdot 10^{-19}$ Дж$=4,5$ эВ (здесь $h=6,62\cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Вариант 2

1. $\alpha_{max}=\arcsin 0,8=53°$.

2. $y(x)=a(1-2x^2/a^2)$ — уравнение параболы; $v=\omega a\sqrt{\cos^2 \omega t+4\sin^2 2\omega t}$.

3. $x_1=\dfrac{M_1(M-M_2)}{M(M_1-M_2)}100\ \%=27,6\ \%$;

$$x_2=\frac{M_2(M_1-M)}{M(M_1-M_2)}100\ \%=72,4\ \%.$$

4. $\Delta L=10$ мм.

5. Резисторы нужно соединить в две параллельные группы из двух резисторов каждая.

6. $\dfrac{H_1}{H_2}=\left(\dfrac{L+\sqrt{L^2-4LF}}{L-\sqrt{L^2-4LF}}\right)^2$.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $(-4/5;\ \cup -3/4)\cup(-2/3;\ \ -\frac{1}{2})\cup(0;\ \ \infty)$.

Указание. Приведите неравенство к виду

$$-\frac{x}{(2x+1)(3x+2)}\leqslant\frac{x}{(5x+4)(4x+3)}.$$

При $x\geqslant 0$ последнее неравенство справедливо. При $x<0$ неравенство справедливо лишь при условии отрицательности одного из знаменателей.

2. 6 мин, 9 мин.

3. πk, $\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $k\in Z$.

4. $\{1;\ 1/9;\ 9\}$.

5. Боковые стороны и меньшее основание равны $2R\sqrt{2}$, большее основание $2R(2+\sqrt{2})$.

6. $\{1;\ 5\}$. Указание. После возведения обеих частей уравнения в квадрат выполните замену $t=\sqrt{-x^2+6x-5}$, затем убедитесь в том, что $t=0$ — единственный корень полученного уравнения. Для доказательства этого воспользуйтесь неравенством $t\leqslant 2$.

Вариант 2

1. $\{0\}$.

2. 10 листов.

3. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in Z$.

4. $\{0,001;\ \ 0,01;\ \ 100;\ \ 1000\}$. Указание. Прологарифмируйте по основанию 10 и выполните замену $y=\lg x$.

5. 39. Указание. Пусть M — точка пересечения медиан. Треугольник AMC — прямоугольный. Его медиана MH равна $1/3$ искомой медианы.

6. $a\in[-6;\ 1]$. Указание. Пусть $t=\sin 2x$. Тогда $0\leqslant t\leqslant 1$ и неравенство приводится к виду $t^2+(a^2-9)t+(a-1)\leqslant 0$.

Физика

1. $v=((l/t)^2+v_в^2+2(l/t)v_в\cos\alpha)^{1/2}=174$ км/ч; $\beta=\arcsin(\sin\alpha\cdot v_в/v)=4,3°$.

2. $a=g\left(1-\dfrac{\varrho_в(\varrho_м+\varrho_c)}{2\varrho_м\varrho_c}\right)=8,6$ м/с^2; $T=2$Н.

3. $v=\sqrt{3}/2v_1=9,8$ км/с.

4. $h=(S_1h_1+S_2h_2)/(S_1+S_2)=25$ см; $Q=(\varrho g/2)(S_1h_1^2+S_2h_2^2-(S_1h_1+S_2h_2)h)\approx 1$ Дж; $\Delta T=Q/(c\varrho(S_1h_1+S_2h_2)\approx 1,8\cdot 10^{-3}$ К.

5. $\Delta T=T_0 m_1/m_2=546$ К.

6. $r=\sqrt{R_1R_2}=5,5$ Ом.

7. $q=BlS/(16\varrho)=0,05$ Кл.

8. $x_m=mv/\sqrt{k(M+m)}=0,1$ м.

9. $H=h(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)/(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)=400$ м.

10. $h=5,2$ см.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. 27,5. 2. 2,33. 3. —0,28. 4. 14. 5. —0,5. 6. 300. 7. 6. 8. 0,8. 9. 4. 10. 2. 11. 0. 12. 1. Указание. Рассмотрите осевое сечение полушара, проходящее через диагонали оснований куба.

Вариант 2

1. 12. 2. 5. 3. 0,96. 4. 2. 5. 5. 6. 13,5. 7. 8. 8. 4. 9. —21. 10. 0,5. 11. 15. 12. 0,5. Указание. Исследуйте на экстремум функцию $y=S_\delta^2(r)$, где S_δ — боковая поверхность конуса.

Физика

Вариант 1

1. $t=v_0/(4g)=0,125$ с.

2. $\alpha=\arccos\dfrac{A}{F_s}=\arccos\dfrac{1}{2}=60°$.

3. $l=m^2v^2/(2\mu g M^2)=1,25$ м.

4. $T=2\pi\sqrt{l/g}=6,28$ с.

5. $p=(p_1V_1+p_2V_2)/(V_1+V_2)=0,7\cdot 10^5$ Па; ответ: 7.

6. $\tau=\dfrac{2cm(t_к-t)}{P\eta/100\ \%}=1676$ с, где $t_к=100\ °C$ — температура кипения воды.

7. $n=\sqrt{R/R_1}=6$.

8. $U_1=C_2U/(C_1+C_2)=160$ В.

9. $F=BIl\sin\alpha=0,09$ Н.

10. $n=lv/c=1,67\cdot 10^3$.

Вариант 2

1. $x=h-gh^2/(2v_0^2)=15{,}1$ м.

2. $a=g(m_2-m_1)/(m_1+m_2)=5$ м/с^2.

3. $F=A/(s\cos\alpha)=50$ Н.

4. $l=m^2v^2/(2\mu gM^2)=2$ м.

5. $V=\nu RT/p=9{,}3$ м^3, где $R=8{,}31$ Дж/ /(моль· К) — универсальная газовая постоянная.

6. $\tau=m(c\Delta t+\lambda)/P=5474$ с.

7. $q=S\mathscr{E}R/(R+r)=10$ мкФ.

8. $F=q^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)=9\cdot10^3$ Н.

9. $m_1/m_2=(r_1/r_2)^2=4$.

10. $\alpha=30°$.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Свет, испускаемый лазером,— почти строго параллельные лучи.
2. Для разных длин световых волн показатели преломления вещества различны.
3. Ближе к перпендикуляру — красный луч, дальше всех — фиолетовый.
4. Для любой линзы главное фокусное расстояние больше (по модулю) для красных лучей.
5. Зеленое.
6. Красный, поскольку при переходе из одной среды в другую частота света, определяющая цвет лучей, не изменяется.
7. Нет, поскольку сама интерференция — следствие принципа суперпозиции, согласно которому фронты волн, «проникающих» одна в другую, взаимно не деформируются.
8. Да, так как прямая и обратная волны когерентны.
9. Из-за стекания воды нижняя часть пленки утолщается, а верхняя становится тоньше. Поэтому соответствующие интерференционные полосы смещаются.
10. Из-за дифракции на краях Луны на поверхности Земли появляется интерференционная картина.

11, 12. Начинают сказываться дифракционные явления.

Микроопыт

В щель будут видны темные дифракционные полосы: четкая полоса в центре и ряд более слабых боковых.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 2)

1. На весах 300 монет.

2. См. рис. 3. Сумма S чисел на каждой окружности равна 12, так как $4S=36+S$.

3. См. рис. 4.

4. Ошибка в графе «Разность мячей» у команды Швеции: при одном выигрыше и одной ничьей разность мячей не может быть «1—1». Общее количество забитых мячей равно 11,

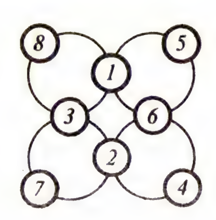


Рис. 3.

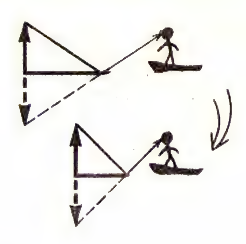


Рис. 4.

а число пропущенных — 12. Поэтому ошибка в счете на 1 мяч, т. е. разность мячей Швеции равна «2—1», либо «1—0». Рассмотрение этих вариантов приводит к следующей таблице:

	Венгр.	Швец.	Исп.	Ирл.	Франц.	Разн. мяч.	Очки
Венгрия	*	—	—	2:1	2:0	4—1	4
Швеция	—	*	1:1	1:0	—	2—1	3
Испания	—	1:1	*	2:2	—	3—3	2
Ирландия	1:2	0:1	2:2	*	—	3—5	1
Франция	0:2	—	—	—	*	0—2	0

5. Разрежем четырехугольник по средним линиям и сложим полученные четырехугольники так, чтобы вершины большого четырехуголь-

АНКЕТА 3—89

Дорогой читатель!

Ежегодно в последнем номере журнала мы помещали «Нашу анкету». Но нам пришло в голову, что легче, проще высказать свое мнение, что называется, по свежим следам. Поэтому мы решили помещать анкету раз в квартал.

Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 3—89».

Очень надеемся на обратную связь.

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______________

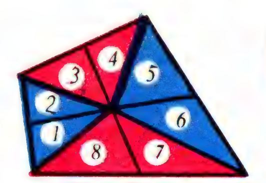
   Ваша профессия (если Вы работаете): ________

   ____

   круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).
2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______________________________

   ____

(см. с. 80)



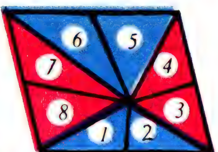


Рис. 5

ника слились в одну точку (рис. 5). Получим параллелограмм, в котором сумма площадей синих треугольников равна половине его площади, т. е. сумме площадей красных треугольников.

Головоломка

(см. «Квант» № 2, 4-ю с. обл.)

См. рис. 6.

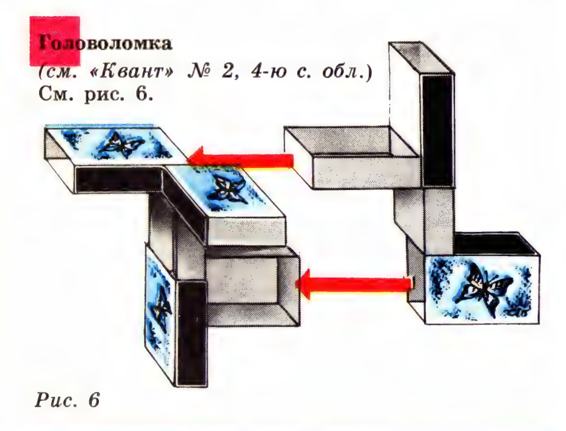


Рис. 6

АНКЕТА 3—89

3. Какие статьи и задачи из номеров 1—3 (номер укажите) Вам понравились? ________

Вы использовали при подготовке к уроку? ________

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ________

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? ________

5. Вам больше всего понравилась обложка номера ________

иллюстрация из номера ______, страница ________

6. Ваши общие замечания и пожелания: ________

Квант

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представил
В. И. Плюснин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова
Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

Сдано в набор 26.12.88. Подписано к печати 6.2.89. Т-08911 Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,05. Тираж 183462 экз. Заказ 3255. Цена 45 коп.

Адрес редакции: 103006 Москва К-6, ул. Горького 32/1, «Квант». Телефон: 250-33-54

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

«Библиотечке «Квант» — 10 лет

(Начало см. на с. 9)

Еще одна неюбилейная, деловая мысль. Книжки есть. Они продолжают выходить. В 1989 году выйдет 10 книг. Их тематика (по физике) охватывает самые разные вопросы. Б. М. Болотовский расскажет, как излучают электроны и атомы, А. Ю. Гросберг и А. Р. Хохлов — о физике полимеров. Две книжки будут посвящены физике планет — от Земли до астероидов, а две — физике конденсированных веществ. Все они, судя по аннотациям, должны понравиться читателям... Итак, к концу 1989 года «Библиотечка «Квант» будет насчитывать 80 книг. Уже не библиотечка, а настоящая библиотека. Так вот, неюбилейная, деловая мысль, преследующая меня, состоит в подозрении, что используется она, эта библиотека недостаточно. Часто ли по книжкам «Библиотечки» проводятся занятия физических кружков? Используются ли эти книжки учителями при подготовке школьных уроков? Если мои подозрения оправданы, надо усилить популяризацию научно-популярных книг «Библиотечки «Квант». Для этого есть много способов. Мне на ум приходят, например, такие: статьи в журнале «Физика в школе» с методическими разработками урока или занятия кружка по какой-либо теме с использованием книжки «Библиотечки»; выступление авторов «Библиотечки «Квант» на методических конференциях учителей. Ну и тому подобное...

Я — не школьный учитель. Я преподаю на физическом факультете Московского университета и знаю, мои коллеги (как и я) используют книжки «Библиотечки «Квант» в своих лекциях, эти книги читают студенты и (даже!) аспиранты. И это хорошо, так как хорошая научно-популярная книга интересна не только тем, кому она непосредственно адресована. Она интересна многим...

Доктор физико-математических наук, профессор М. И. Каганов

Книги, вышедшие в серии «Библиотечка «Квант» (порядковый номер книги — номер выпуска)

1. *М. П. Бронштейн.* Атомы и электроны.
2. *М. Фарадей.* История свечи.
3. *О. Оре.* Приглашение в теорию чисел.
4. Опыты в домашней лаборатории.
5. *И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов.* Задачи по физике.
6. *Л. П. Мочалов.* Головоломки.
7. *П. С. Александров.* Введение в теорию групп.
8. *В. Г. Штейнгауз.* Математический калейдоскоп.
9. Замечательные ученые.
10. *В. М. Глушков, В. Я. Валах.* Что такое ОГАС?
11. *Г. И. Копылов.* Всего лишь кинематика.
12. *Я. А. Смородинский.* Температура.
13. *А. Е. Карпов, Е. Я. Гик.* Шахматный калейдоскоп.
14. *С. Г. Гиндикин.* Рассказы о физиках и математиках.
15. *А. А. Боровой.* Как регистрируют частицы.
16. *М. И. Каганов, В. М. Цукерник.* Природа магнетизма.
17. *И. Ф. Шарыгин.* Задачи по геометрии: Планиметрия.
18. *Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова.* Беседы о преломлении света.
19. *А. Л. Эфрос.* Физика и геометрия беспорядка.
20. *С. А. Пикин, Л. М. Блинов.* Жидкие кристаллы.
21. *В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович.* Наглядная топология.
22. *М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой.* Задачи по математике: Алгебра и анализ.
23. *А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров.* Введение в теорию вероятностей.
24. *Е. Я. Гик.* Шахматы и математика.
25. *М. Д. Франк-Каменецкий.* Самая главная молекула.
26. *В. С. Эдельман.* Вблизи абсолютного нуля.
27. *С. Р. Филонович.* Самая большая скорость.
28. *Б. С. Бокштейн.* Атомы блуждают по кристаллу.
29. *А. В. Бялко.* Наша планета — Земля.
30. *М. Н. Аршинов, Л. Е. Садовский.* Коды и математика.
31. *И. Ф. Шарыгин.* Задачи по геометрии: Стереометрия.
32. *В. А. Займовский, Т. Л. Колупаева.* Необычные свойства обычных металлов.
33. *М. Е. Левинштейн, Г. С. Симин.* Знакомство с полупроводниками.
34. *В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский, Е. Л. Сурков.* Релятивистский мир.
35. *А. А. Михайлов.* Земля и ее вращение.
36. *А. П. Пурмаль, Е. М. Слободецкая, С. О. Травин.* Как превращаются вещества.
37. *Г. С. Воронов.* Штурм термоядерной крепости.
38. *А. Д. Чернин.* Звезды и физика.
39. *В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев.* Удивительная гравитация.
40. *С. С. Хилькевич.* Физика вокруг нас.
41. *Г. А. Звенигородский.* Первые уроки программирования.
42. *Л. В. Тарасов.* Лазеры: Действительность и надежды.
43. *О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов.* Международные физические олимпиады школьников.
44. *Л. Е. Садовский, А. Л. Садовский.* Математика и спорт.
45. *Л. Б. Окунь.* $\alpha, \beta, \gamma \ldots Z$: Элементарное введение в физику элементарных частиц.
46. *Я. Е. Гегузин.* Пузыри.
47. *Л. С. Марочник.* Свидание с кометой.
48. *А. Т. Филиппов.* Многоликий солитон.
49. *К. Ю. Богданов.* Физик в гостях у биолога.
50. Занимательно о физике и математике.
51. *Х. Рачлис.* Физика в ванне.
52. *В. М. Липунов.* В мире двойных звезд.
53. *И. К. Кикоин.* Рассказы о физике и физиках.
54. *Л. С. Понтрягин.* Обобщения чисел.
55. *И. Д. Данилов.* Секреты программируемого микрокалькулятора.

(Окончание см. на с. 72)



Практикум абитуриента

Законы сохранения энергии и импульса

Кандидат физико-математических наук
А. И. ЧЕРНОУЦАН

В этой статье обсуждается вопрос *совместного* использования двух законов сохранения — энергии и импульса — для решения различных физических задач.

На приемных экзаменах по физике нередко возникает ситуация, когда абитуриенты, хорошо зная каждый закон сохранения в отдельности, испытывают «психологические» трудности при необходимости соединить эти законы вместе, в рамках одной задачи. Причем чаще всего от внимания ускользает более простой, на наш взгляд, закон — закон сохранения импульса. Записав соответствующее уравнение для энергии, абитуриент уже не вспоминает об импульсе — и... попадает впросак. Впрочем, бывает и по-другому.

Рассмотрим несколько конкретных примеров того, как именно совместные «усилия» энергии и импульса приводят к нужному результату.

Задача 1. *Два шарика, сделанные из одного материала и имеющие массы m_1 и m_2, движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. На сколько возрастет температура шариков после лобового абсолютно неупругого удара, если удельная теплоемкость материала шариков c? Начальные температуры шариков были одинаковыми.*

Изменение температуры шариков определяется увеличением их внутренней энергии:

$$\Delta E_{\text{вн}} = c\,(m_1 + m_2)\Delta t.$$

Многие абитуриенты ошибочно считают, что в результате удара во внут-

реннюю энергию переходит вся начальная кинетическая энергия системы $m_1v_1^2/2+m_2v_2^2/2$. При этом они забывают, что шарики не могут остановиться после удара, так как это противоречило бы закону сохранения импульса — начальный импульс системы $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$, вообще говоря, не равен нулю. Значит, при подсчете энергии надо учесть и кинетическую энергию шариков в конечном состоянии.

Обозначим скорость слипшихся после абсолютно неупругого удара шариков через v и запишем законы сохранения энергии и импульса, точнее — проекции импульса на направление движения первого шарика:

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}+\Delta E_{\text{вн}},$$

$$m_1v_1-m_2v_2=(m_1+m_2)v.$$

Решая совместно полученные три уравнения, находим искомое увеличение температуры:

$$\Delta t=\frac{m_1m_2\,(v_1+v_2)^2}{2c\,(m_1+m_2)^2}.$$

Задача 2. *Два вагона, массы которых M_1 и M_2, движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. При столкновении происходит сжатие четырех одинаковых буферных пружин, после чего вагоны расходятся. Найдите максимальную деформацию каждой пружины, если ее жесткость равна k.*

В этой задаче, в отличие от предыдущей, можно использовать закон сохранения механической энергии (подразумевается, что трение мало́, а пружины идеальные), приравняв начальную энергию вагонов к энергии системы в тот момент, когда деформация пружин x максимальна. При этом искомая величина x войдет в потенциальную энергию упругой деформации пружин:

$$E_p=4kx^2/2.$$

Однако, кроме этой энергии, надо учесть еще и кинетическую энергию вагонов.

Тот факт, что при максимальном сближении вагоны не останавливаются (о чем, к сожалению, забывают многие абитуриенты), следует, как и в предыдущей задаче, из закона сохранения импульса. Единственная особенность этого момента состоит в том, что при максимальной деформации пружин скорости вагонов одинаковы: $v_1'=v_2'=v$. Поэтому законы сохранения энергии и импульса (вернее — его проекции) выглядят следующим образом:

$$\frac{M_1v_1^2}{2}+\frac{M_2v_2^2}{2}=\frac{(M_1+M_2)v^2}{2}+4\,\frac{kx^2}{2},$$

$$M_1v_1-M_2v_2=(M_1+M_2)v.$$

Отсюда получаем

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_1M_2}{k(M_1+M_2)}}\,(v_1+v_2).$$

Задача 3 (баллистический маятник). *В брусок массой M, висящий на параллельных нитях длиной l, попадает горизонтально летящая пуля массой m и застревает в нем (рис. 1). В результате удара каждая нить отклоняется на угол α. Найдите начальную скорость пули v. Нити считать идеальными (невесомыми и нерастяжимыми).*

Как видно из рисунка, угол отклонения нитей α связан с высотой h, на которую поднимается брусок:

$$h=l\,(1-\cos\alpha),$$

а высоту h можно связать с потенциальной энергией бруска и пули в конечном состоянии:

$$E_p=(M+m)gh.$$

Возникает вопрос: выполняется ли в данной ситуации закон сохранения

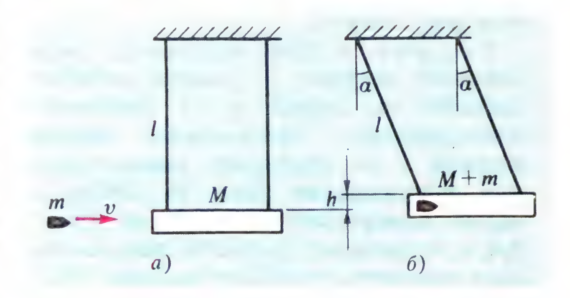


Рис. 1.

механической энергии? Другими словами, равна ли энергия системы в конечном состоянии ее начальной энергии, т. е. кинетической энергии пули $mv^2/2$? Ответ, конечно, отрицательный. Ведь мы знаем, что при неупругом ударе часть механической энергии переходит во внутреннюю.

Как же быть? Рассмотрим еще одно, промежуточное состояние системы — сразу после окончания удара, когда пуля уже застряла в бруске, но нити еще вертикальны. Энергия системы в этом состоянии представляет собой просто кинетическую энергию бруска с пулей: $E_k=(m+M)v'^2/2$, где v' — их общая скорость. После того как неупругий удар уже закончился, энергия больше теряться не будет, и можно записать

$$E_k=E_p,$$

или

$$\frac{(m+M)v'^2}{2}=(M+m)gh.$$

Скорость v' можно связать с начальной скоростью пули с помощью закона сохранения импульса

$$mv=(m+M)v'.$$

Из последних двух уравнений, с учетом выражения для h, имеем

$$v=2\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Заметим, что в этой задаче законы сохранения импульса и энергии работают не одновременно, а как бы по очереди. Понять это оказывается не так просто, и многие абитуриенты решают задачи такого типа с помощью одного закона сохранения энергии, получая, конечно же, неправильные результаты.

Задача 4. *Три маленьких заряженных шарика — масса каждого шарика m, заряд q — соединены одинаковыми идеальными нитями длиной l и образуют равносторонний треугольник (рис. 2). Одну из нитей перерезают, и шарики приходят в движение. Найдите максимальную скорость среднего шарика (3) в процессе движения. Действием сил тяготения можно пренебречь.*

Так как система замкнута и в ней действуют только силы кулоновского взаимодействия, к системе можно применить закон сохранения энергии. При этом энергию взаимодействия шариков 1, 3 и 2, 3 учитывать не будем, поскольку она в состояниях а) и б) (см. рис. 2) одна и та же. Тогда закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{kq^2}{l}=\frac{kq^2}{r_{12}}+2\frac{mv^2}{2}+\frac{mV^2}{2}.$$

На основании одного этого уравнения нельзя не только вычислить искомую скорость V, но и понять, когда она максимальна. Однако раз система замкнута, мы можем применить еще и закон сохранения импульса — полный импульс трех шариков все время равен нулю. Для проекций импульсов получим

$$0=2mv-mV.$$

Теперь видно, что скорость V будет максимальной при наибольшем удалении шариков 1 и 2 друг от друга, т. е. когда $r_{12}=2l$. Решая соответствующие уравнения, найдем

$$V=q\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{ml}}.$$

Почему-то многим школьникам использование при решении этой задачи закона сохранения импульса кажется необычным или даже странным.

Задача 5. *На бруске длиной l и массой M, расположенном на гладкой горизонтальной поверхности, лежит маленькое тело массой m (рис. 3). Коэффициент трения между телом и бруском μ. С какой скоростью v*

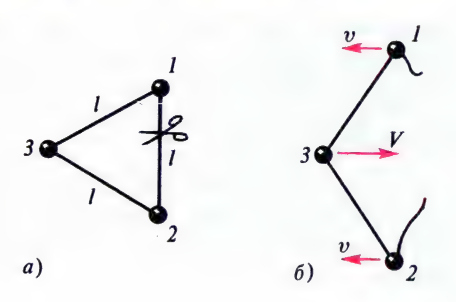


Рис. 2.

должна двигаться система, чтобы после упругого удара бруска о стенку тело упало с бруска?

Удар бруска о стенку приведет к тому, что его скорость скачком изменится на противоположную. Скорость же тела за время удара измениться не успеет, и оно начнет скользить по бруску.

Найдем, на какое расстояние x переместится тело относительно бруска до окончания скольжения. Ясно, что условие $x > l$ и будет условием падения тела с бруска. С расстоянием x связана работа силы трения скольжения —

$$A_{тр} = -\mu mgx,$$

которая, в свою очередь, равна изменению кинетической энергии системы:

$$A_{тр} = \frac{(m+M)v'^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}\right).$$

Здесь v' — скорость бруска с телом в тот момент, когда тело останавливается относительно бруска. Эту скорость можно найти из закона сохранения импульса

$$Mv - mv = (M+m)v'.$$

Решая совместно все три уравнения, получаем

$$x = \frac{2Mv^2}{\mu g(M+m)}.$$

Условие $x > l$ позволяет найти искомую скорость:

$$v > \sqrt{\frac{1}{2}\mu gl\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Может показаться непонятным, почему работа $A_{тр}$ равна произведению силы на перемещение тела относительно бруска — ведь брусок не стоит на месте, а значит, перемещение тела относительно земли не равно его перемещению относительно бруска. Дело в том, что изменение механической энергии системы равно полной работе $F_{тр}$ — как над телом, так и над бруском:

$$A_{тр} = (F_{тр}x_т) + (-F_{тр}x_б) = F_{тр}(x_т - x_б) = F_{тр}x.$$

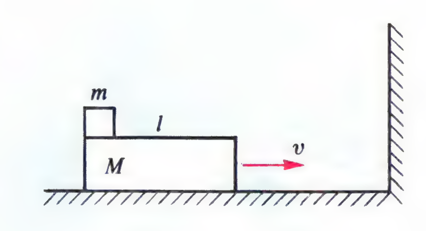


Рис. 3.

В заключение разберем задачу на расчет ядерной реакции. В этой задаче более отчетливо, чем в предыдущих, выступает векторный характер закона сохранения импульса.

Задача 6. *Для проведения реакции синтеза тяжелого и сверхтяжелого изотопов водорода ($^2H + {}^3H = {}^4He + n$) ускоренные до энергии $E = 2$ МэВ ядра дейтерия направляют на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $\Delta E = 14$ МэВ.*

Закон сохранения энергии в этой реакции имеет вид

$$\frac{m_д v_д^2}{2} = E = \frac{m_г v_г^2}{2} + \frac{m_н v_н^2}{2} - \Delta E$$

(здесь и далее индекс «д» обозначает дейтерий, «г» — гелий, «н» — нейтрон). Закон сохранения импульса надо записать в проекциях как на ось X (направление скорости падающих дейтронов), так и на ось Y (направление вылета регистрируемых нейтронов):

$$m_д v_д = m_г v_{гx},$$
$$0 = m_н v_н - m_г v_{гy}.$$

Принимая во внимание, что $v_г^2 = v_{гx}^2 + v_{гy}^2$, получаем

$$\frac{m_н v_н^2}{2}\left(1 + \frac{m_н}{m_г}\right) = \Delta E + \frac{m_д v_д^2}{2}\left(1 - \frac{m_д}{m_г}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $m_н/m_г = 1/4$, а $m_д/m_г = 1/2$, находим энергию регистрируемых нейтронов:

$$E_н = \frac{4}{5}\left(\Delta E + \frac{1}{2}E\right) = 12 \text{ МэВ}.$$

Упражнения

1. Тележка массой M движется со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 4). На тележку с высоты

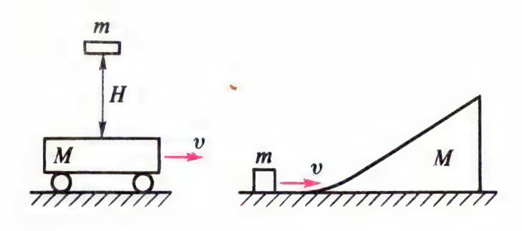


Рис. 4. Рис. 5.

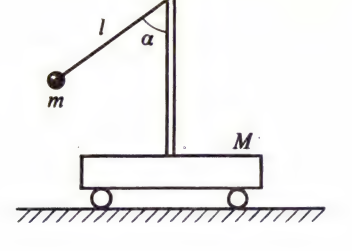


Рис. 6.

H падает кирпич и остается на тележке. Какое количество теплоты выделится при ударе? Масса кирпича m.

2. Ядро, летевшее со скоростью $\vec{v}$, в результате ядерной реакции разлетается на два осколка. Массы осколков m_1 и m_2, а их скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ составляют между собой угол α. Какая энергия выделяется в этой реакции?

3. Брусок массой M, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен к вертикальной стене пружиной жесткости k. В брусок попадает горизонтально летящая пуля и застревает в нем. Найдите максимальную деформацию пружины. Масса пули m, ее скорость v.

4. На гладкой горизонтальной плоскости стоит клин массой M (рис. 5). На клин въезжает тело массой m, двигавшееся по плоскости со скоростью v. На какую максимальную высоту поднимется тело по клину? Нижняя часть клина имеет плавное соединение с плоскостью.

5. На тележке укреплен штатив, к которому с помощью нити прикреплен шарик (рис. 6). Сначала нить с шариком удерживают под углом α к вертикали, а потом отпускают. Найдите максимальную скорость, приобретаемую тележкой. Масса тележки со штативом M, масса шарика m, длина нити l. Тележка находится на гладкой горизонтальной плоскости.

„Квант" улыбается

Будильник

Высокоэффективный будильник придумали юные физики города Зевакинска. Первые 10 минут он воспроизводит обычный звонок, вторые 10 минут — работу космического двигателя, а последние 2 минуты — голос директора школы.



Опровержение

Десятиклассник Семенов убедительно доказал несостоятельность истории о том, что Ньютон сделал свое замечательное открытие после того, как на него упало яблоко. Целое воскресенье одноклассник Семенова Пупков бросал ему на голову различные сорта яблок. Ничего гениального в голову Семенову не пришло.

Прислал И. Макиенко



Заявление

В целях проверки результатов опытов Галилео Галилея в связи с приближающимся экзаменом по физике, а также ввиду отсутствия в нашем городе наклонных башен прошу срочно командировать меня в город Пизу. Петров.



Варианты вступительных экзаменов

Ленинградский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет, факультеты прикладной математики — процессов управления и физический)

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$$

2. Решите неравенство

$$3\sqrt{\log_3 x}-\log_3(3x)\leqslant 1.$$

3. Найдите все пары (a, b) значений параметров a и b, для которых все вещественные корни уравнения $x^2-ax+a=0$ являются также корнями уравнения $x^2+b^2x-8b=0$.

4.1. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E. Точка G является точкой пересечения прямой, параллельной BC и проходящей через D, с отрезком AE, а точка F — точка пересечения отрезка CD с прямой, проходящей через E и параллельной AB. Докажите, что отрезок GF параллелен основанию AC.

4.2.*) Найдите площадь фигуры, образованной теми точками (x, y) декартовой плоскости, для которых выполнены неравенства

$$|x+1|+|y|\leqslant 2,\ (x+2)^2+y^2\leqslant 1.$$

5. В прямой круговой конус вписан шар объемом V. Какое наименьшее значение может иметь объем конуса?

Вариант 2

(психологический факультет отделение экономической кибернетики экономического факультета)

1. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-1$, $b-4$, $c-3$ — геометрическую. Известно также, что произведение крайних членов геометрической прогрессии на 2 больше среднего члена арифметической. Найдите эти числа.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{5-x^2}=x+1.$$

3.1. Найдите все решения неравенства $1+\cos 2x\geqslant\cos x\,(1+|1-2\cos x|)$ на интервале $[0;\ 2\pi]$.

3.2.*) Решите неравенство $|1/2-\cos x|\geqslant\cos x$.

4. В равнобедренном треугольнике радиус описанного круга равен R, а вписанного — r. Найдите расстояние между центрами этих кругов.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через ребро основания BC проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Найдите отношение объемов частей, на которые это сечение разбивает пирамиду, если известно, что высота пирамиды в два раза больше радиуса окружности, описанной вокруг основания.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 12, а число, записанное теми же цифрами в противоположном порядке, меньше утроенного исходного числа на 24.

2. Решите уравнение

$$(7\cos^2 x-2)\sqrt{2\cos x+1}=0.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x}\geqslant\sqrt{3-x}.$$

4. Постройте график функции

$$f(x)=\frac{x^2-3|x|+4}{x}.$$

5. В правильной треугольной пирамиде высота равна H, а радиус круга, вписанного в основание, равен R. Найдите объем шара, касающегося плоскости основания в его центре и плоскости, проведенной через вершину пирамиды и середины двух сторон основания.

Вариант 4

(биолого-почвенный факультет, отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. Постройте график функции

$$f(x)=|x-1|-|x+3/2|.$$

2. Решите уравнение

$$x-1=\sqrt{x^4-x^3-x^2-2x+1}.$$

3. Решите неравенство

$$\sin(\cos x)\geqslant 1/2.$$

4. На плоскости дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на AB и CD.

5. Две равные правильные треугольные пирамиды $SABC$ и $S'A'B'C'$ расположены так, что $S=S'$, центры оснований O и O' совпадают, а угол AOA' равен 30°. Найдите объем общей части этих двух пирамид, если известно, что стороны оснований равны a, а общая высота пирамид — h.

---

*) Задача 4.2 предлагалась на физическом факультете.

*) Задача 3.2 предлагалась на отделении экономической кибернетики.

Вариант 5
(геологический факультет)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2u+v=7, \\ |u-v|=2. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\cos^2 2x-4\sin^4 x+3=0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{1/4}(2x+3)>\log_9 27.$$

4. На сторонах треугольника ABC построены вне его правильные треугольники. Докажите, что круги, описанные вокруг этих треугольников, целиком покрывают $\triangle ABC$.

5. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части равного объема. Найдите отношение площадей боковых поверхностей этих частей.

Вариант 6
(географический факультет, отделения политэкономии и прикладной социологии экономического факультета)

1. Исследуйте функцию

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$$

и постройте ее график.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x}=1-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-2}(1+11x^3-x^6)<0.$$

4. Найдите площадь фигуры, образованной теми точками (x, y) декартовой плоскости, для которых выполнены условия:

$$|x|+|y-1|\leqslant 2,\ x^2+y^2\geqslant 1-\frac{2}{\sqrt{3}}y.$$

5. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через точку A и среднюю линию $D'E'$ основания $A'B'C'$, параллельную $B'C'$, проведено сечение. Найдите отношение объемов образовавшихся частей призмы.

Вариант 7
(отделение экономики, отделение управления научными исследованиями и проектированием экономического факультета)

1. См. задачу 1 варианта 3.

2. Решите уравнение

$$|1/2-\cos x|=\cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{2-x}(4-x^2)\leqslant 0.$$

4. Найдите минимальное и максимальное значения функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$ на интервале $(3; 5)$.

5. См. задачу 5 варианта 3.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. При каких значениях угла α возможно равновесие одинаковых брусков в положении, показанном на рисунке 1? Коэффициент трения между брусками и подставкой μ, трение между брусками пренебрежимо мало.

2. Найдите работу, совершаемую одним молем идеального газа в цикле *1—2—3—4—1* (рис. 2), если известны температуры T_1 и T_3 в точках *1* и *3* соответственно, причем эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

3. Какой заряд пройдет через резистор сопротивлением R после замыкания ключа в схеме, показанной на рисунке 3? Величины L, R, $\mathscr{E}$ и r заданы.

4. При помещении предмета в положение *1* либо *2* (рис. 4) линза дает его действительное изображение с увеличением Γ_1 или Γ_2 соответственно. Найдите увеличение для случая, когда предмет находится посередине между положениями *1* и *2*.

Вариант 2

1. Два маленьких шарика, массы которых m и M, соединены легким жестким стержнем длиной l и находятся в равновесии в положении, показанном на рисунке 5. Коэффициент трения между стержнем и выступом μ, трение между шариком m и вертикальной стенкой отсутствует. Каким условиям должны удовлетворять параметры m, M, μ, l, a и α, чтобы указанное равновесие было возможно?

2. Найдите КПД тепловых машин, работающих по циклам *1—2—3—1* и *1—3—4—1*, если КПД машины, работающей по циклу *1—2—3—4—1*, равен η (рис. 6). В качестве рабочего тела во всех случаях используется идеальный газ.

3. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R после замыкания ключа в схеме, показанной на рисунке 7? Величины C, R, $\mathscr{E}$ и r заданы.

4. На главной оптической оси линзы расположены предметы AA_1, BB_1 и их изображения $A'A_1'$, $B'B_1'$ соответственно (рис. 8). Найдите отношение $\gamma=A'B'/AB$, если известно, что $A'A_1'/AA_1=\Gamma_1$ и $B'B_1'/BB_1=\Gamma_2$.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

Вариант 3

1. Первый вагон тронувшегося с места поезда прошел мимо неподвижного наблюдателя, стоявшего у начала этого вагона, за время t_1, последний — за t_2. Считая движение поезда равноускоренным, а длины вагонов одинаковыми, найдите время движения мимо наблюдателя всего поезда.

2. Один моль идеального газа участвует в цикле *1—2—3—4—1* (рис. 9). Определите работу, совершенную газом, если температуры газа в состояниях *1* и *3* равны T_1 и T_3 соответ-

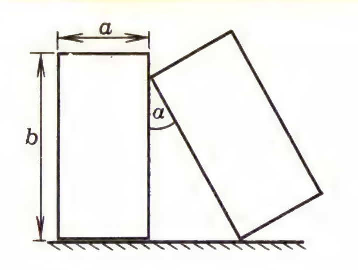
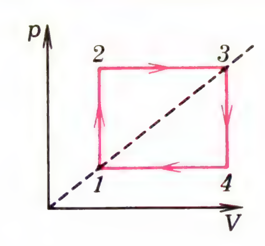


Рис. 1.



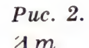


Рис. 2.

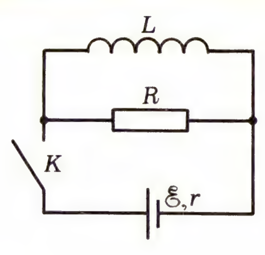


Рис. 3.

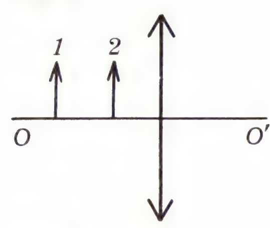


Рис. 4.

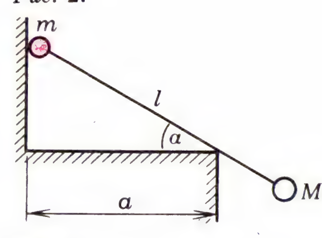


Рис. 5.

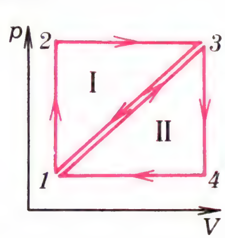


Рис. 6.

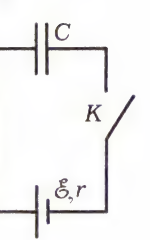


Рис. 7.

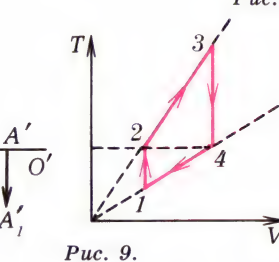


Рис. 8.

Рис. 9.

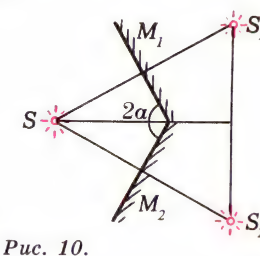


Рис. 10.

ственно, а температуры в состояниях *2* и *4* одинаковы.

3. На резисторе сопротивлением R, включенном в некоторую схему, выделяется мощность P. Если к этому резистору подключить параллельно такой же, то в обоих резисторах вместе выделится та же мощность P. Приведите пример такой схемы и обоснуйте расчетом.

4. Точка S_1 является изображением точечного источника S в плоском зеркале M_1, точка S_2 — изображением того же источника в зеркале M_2 (рис. 10). Найдите длину отрезка S_1S_2, если $SS_1=SS_2=a$ и угол между зеркалами 2α.

Публикацию подготовили С. В. Ащеулов, А. П. Барабан, Ю. А. Давыдов, А. Е. Кучма

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{9}{17(4\cdot 2^x-3)}-\frac{1}{4\cdot 2^x-1}+\frac{2}{17(2^x-5)}=0.$$

2. Решите неравенство

$$15\log_{1/6}(y/36)-4\log_{1/6}(y/36)\log_{1/6}y-28>0.$$

3. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии с положительным знаменателем равна 13, а сумма обратных им величин равна 13/9. Найдите первый член прогрессии.

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\sin x-\sin 2x+\sin 3x>0,\\ 0<x<\pi.\end{cases}$$

5. В шар вписан конус. Докажите, что отношение $\frac{RS}{V}$, где R — радиус основания конуса, S — площадь боковой поверхности конуса, V — объем шара, может быть равно $\frac{36\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}$. Чему равно в этом случае отношение высоты конуса к радиусу шара?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$10+\frac{3}{4\log_{25}x-1}-\frac{13}{6\log_5 x-5}=0.$$

2. Решите уравнение

$$26\sin^2 x-\sin 2x=2.$$

3. Решите неравенство

$$|24x^2-39x-8|<|18x^2-25x+32|.$$

4. В окружности радиусом R проведены диаметр и хорда, образующие угол $2 \operatorname{arctg} 1/4$. Точка их пересечения лежит на расстоянии $R/2$ от центра окружности и делит диаметр и хорду на две части. Найдите радиус r круга, касающегося исходной окружности и меньших частей диаметра и хорды.

5. Известно, что A, B, C, D — постоянные, $16D<49$. Сумма функций $\frac{1}{Ax+B}$ и $\frac{1}{Cx-1}$ равна функции $\frac{12x-6}{4x^2-7x+D}$. Найдите D.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На горизонтальном столе лежит лист бумаги, прижатый однородным стержнем массой m, верхний конец которого шарнирно закреплен. Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к листу, чтобы вытащить его? Угол между стержнем и листом α, коэффициент трения между ними μ. Трением между столом и бумагой пренебречь.

2. Нить длиной l с привязанным к ней шариком массой m отклонили на $90°$ от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии от точки подвеса по вертикали нужно поставить гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? Нить выдерживает силу натяжения T.

3. На горизонтальной плоскости лежат два бруска, соединенные ненапряженной пружиной. Массы брусков m_1 и m_2. Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициент трения брусков о плоскость μ.

4. Объем воздушного шара $V=224$ м^3, масса оболочки $m=145$ кг. Шар заполнен горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении. Какую температуру должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Температура воздуха вне оболочки $t_0=0$ °C.

5. Тонкостенный резиновый шар массой $m_0=50$ г наполнен азотом и погружен в озеро на глубину $h=100$ м. Найдите массу азота, если шар находится в положении равновесия. Будет ли равновесие устойчивым? Атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст., температура в глубине озера $t=4$ °C, молярная масса азота $\mathrm{M}=0{,}028$ кг/моль. Натяжением резины пренебречь.

6. Два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу. В момент, когда расстояние между зарядами r, они имеют скорости v_1 и v_2. До какого минимального расстояния сблизятся заряды?

7. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле, перпендикулярном пластинам. Напряженность поля $E=1$ кВ/м, площадь пластин конденсатора $S=100$ см^2. Какие заряды окажутся на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко? Пластины конденсатора до замыкания не заряжены.

8. Луч света падает на стопку плоских прозрачных пластин одинаковой толщины, показатель преломления каждой из которых в k раз меньше, чем у вышележащей. При каком наименьшем угле падения луч не пройдет сквозь стопку? Показатель преломления верхней пластины n, число пластин N.

9. На каком расстоянии от стеклянного шара радиусом R следует поместить точечный источник света, чтобы его изображение оказалось с другой стороны от шара на таком же расстоянии? Показатель преломления стекла n. Изображение создается узким пучком лучей, близких к оптической оси.

10. Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda=83$ нм. На какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E=7{,}5$ В/см? Красная граница фотоэффекта для алюминия соответствует длине волны $\lambda_{max}=332$ нм.

Публикацию подготовили
Ю. Н. Кузьмин, Ю. Д. Максимов,
В. Н. Романов, И. Б. Русанов, Б. А. Чихачев

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=2-(x^2-x+1)(x^2-x).$$

а) Решите уравнение $f(x)=0$.

б) Найдите наибольшее значение $f(x)$.

в) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=x^2-x+a$ в зависимости от a?

2. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 1, углы A и B равны α и $\pi/3$ соответственно. Обозначим через CK и AL высоты треугольника, через $m(\alpha)$ — сумму длин отрезков AK и CL.

а) Выразите $m(\alpha)$ через α.

б) Решите уравнение $m(\alpha)=1$.

в) Постройте график функции $m(\alpha)$. Отметьте координаты точек экстремума.

3. Функция $y=f(x)$ задается формулой $f(x)=x^4-2ax+a^2-2$.

а) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ при $a=2$.

б) Сколько корней имеет функция $f(x)$ при $a=2$?

в) При каких a функция $f(x)$ имеет ровно один корень?

г) Для каких x существует a такое, что $x^4-2ax+a^2-2=0$?

Вариант 2

1. Дана функция

$$f(x)=\sqrt{x+1}-x.$$

а) Решите неравенство $f(x) < -1$.

б) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на промежутке $[-1; 1]$.

в) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a?

2. В треугольнике ABC угол A прямой, $AB = AC = 2$. Точка M лежит внутри треугольника, причем $AM = 1$, $\angle MAC = \alpha$. Пусть $q = BM \cdot MC$.

а) Докажите, что $q = \sqrt{8u^2 - 20u + 17}$, где $u = \sin\alpha + \cos\alpha$.

б) Решите уравнение $q(\alpha) = 3$.

в) Найдите наменьшее значение функции $q(\alpha)$.

3. Дана функция $y = x^4 + 2x^3 + 1$. Пусть A, B, C — точки на ее графике, имеющие абсциссы $a-1$, a, $a+1$ соответственно.

а) Найдите площадь $S(a)$ треугольника ABC.

а) Постройте график функции $S(a)$. Отметьте координаты точек экстремума.

в) Решите уравнение $S(a) = 1/2$.

г) Сколько корней имеет уравнение $S(a) = b$ в зависимости от b?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Линейная скорость точек обода вращающегося диска $v_1 = 6$ м/с, а точек, находящихся на $l = 20$ см ближе к оси вращения, $v_2 = 4$ м/с. Найдите угловую скорость вращения и радиус диска.

2. С крыши дома высотой $H = 20$ м вертикально вверх брошен камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определите скорость камня на высоте $h = 10$ м от земли и кинетическую энергию камня в момент его удара о землю. Масса камня $m = 1$ кг.

3. Однородное бревно длиной l и массой $m = 100$ кг лежит на двух опорах. Расстояние от правого конца бревна до ближайшей опоры $l/3$, от левого — $l/4$. С какой силой давит бревно на каждую из опор? Какую минимальную силу надо приложить, чтобы немного приподнять бревно за правый конец?

4. Один из математических маятников совершил $n_1 = 10$ колебаний, другой за это же время — $n_2 = 6$ колебаний. Разность длин маятников $\Delta l = 16$ см. Определите длины маятников и периоды их колебаний.

5. Баллон содержит сжатый газ при $t_1 = 27$ °C и давлении $p_1 = 100$ кПа. Каково будет давление, когда из баллона будет выпущено $k = 0{,}4$ массы газа, а температура понизится до $t_2 = 7$ °C?

6. При изобарическом нагревании $m = 12$ г гелия он совершил работу $A = 1$ кДж. На сколько изменилась температура газа? Какое количество теплоты ему было передано?

7. Два точечных заряда $q_1 = 0{,}6$ мкКл и $q_2 = -0{,}3$ мкКл находятся в вакууме на расстоянии $l = 10$ см друг от друга. Определите положение точки, в которой напряженность поля, создаваемого этими зарядами, равна нулю.

8. В цепь, состоящую из аккумулятора и резистора сопротивлением $R = 10$ Ом, включают вольтметр: сначала последовательно, а затем параллельно резистору. Оба показания вольтметра оказываются одинаковыми. Сопротивление вольтметра $R_V = 1$ кОм. Каково внутреннее сопротивление аккумулятора?

9. Под каким углом водолаз видит горизонт из воды? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

10. На экран проецируют диапозитив, причем площадь изображения в $k = 100$ раз больше площади диапозитива. Расстояние от диапозитива до объектива проекционного аппарата $d = 25$ см. Определите расстояние от объектива до экрана и фокусное расстояние объектива.

Публикацию подготовили Н. Е. Барабанов, Ю. В. Богачев, П. П. Каргаев, Г. Д. Лапин, С. В. Фомин

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Задачи устного экзамена

Математический факультет

1. Докажите справедливость равенства

$$\frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} = 1.$$

2. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 4;$

б) $\sqrt{(x-1)^2(x-5)} = |x-1|\sqrt{25 - x^2};$

в) $2^{2x} - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1};$

г) $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \dfrac{x}{3}} - 2\log_3\sqrt{x} + \log_3^2 x = 3.$

3. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leqslant x + 4;$

б) $\left|\dfrac{3|x| + 2}{|x| - 1}\right| < 3;$

в) $6{,}25^{2 - \log_2 x^2} > 0{,}4^{\log_2 x + 2};$

г) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_{0,3}\left(\log_3 \frac{x-2}{x-4}\right)} \leqslant 1.$

4. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{2 - \log_{0,5}\left(\frac{x}{x-1}\right)}.$$

5. В окружность вписан четырехугольник $ABPK$. Его диагонали пересекаются в точке A. Докажите, что $MA \cdot AP = KA \cdot AB$.

6. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB \| CD$) диагонали пересекаются в точке O под

углом 60° ($\angle AOB=60°$). Докажите, что середины отрезков AO, OD и BC являются вершинами равностороннего треугольника.

7. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а высота 20. Определите высоту, опущенную на боковую сторону.

8. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a>b$), двугранный угол при ребре большего основания равен φ. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

9. Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем конуса.

10. Определите объем правильной шестиугольной призмы, если известно, что ее самая большая диагональ имеет длину d и составляет с боковым ребром призмы угол α.

11. В основании призмы — правильный треугольник, радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен b. Одна из вершин призмы проектируется в центр основания. Боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

Физический и индустриально-педагогический факультеты

12. Что больше:
а) $\log_5 \sin 46°$ или $\log_5 \cos 46°$;
б) $\log_{\frac{1}{5}} \cos 18°$ или $\log_{\frac{1}{5}} \sin 18°$?

13. Упростите выражение
$$\frac{1}{2}(\sin^4\alpha+\cos\alpha)+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

14. Постройте график функции:
а) $y=(4-|x|)(1-|x|)$;
б) $y=\lg|x-1|$;
в) $y=2^{-|x|}$.

15. Решите уравнение:
а) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$;
б) $(3^{x+1})^x=\lg 10-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 16$;
в) $\dfrac{\ln(10x-x^2-7)}{\ln(x+1)}=2.$

16. Решите неравенство:
а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}>243$;
б) $5^{\log_5\frac{x-2}{x}}<1$;
в) $\dfrac{-x^2+5x-18}{\log_{\frac{1}{5}} x}>0.$

17. Найдите область определения функции:
а) $y=\log_{3-x}(x^2-1)$;
б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$;
в) $y=\sqrt{2x^2+13x-7}-\log_2(4-x)$.

18. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит между точками A и B. Длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найдите длину стороны AC.

19. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a укажите треугольник наибольшей площади.

20. Площадь боковой поверхности конуса равна P, угол между высотой и образующей равен β. Найдите объем конуса.

21. Каждое ребро наклонной треугольной призмы имеет длину a. Одно из боковых ребер образует с прилежащими к нему сторонами основания углы по 60°. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

22. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13. Найдите объем пирамиды.

Публикацию подготовила
З. И. Новосельцева

«Библиотечке «Квант» — 10 лет

(Начало см. на с. 9)

56. *В. М. Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах.
57. *А. А. Силин.* Трение и мы.
58. *Л. А. Ашкинази.* Вакуум для науки и техники.
59. *А. Д. Чернин.* Физика времени.
60. Задачи московских физических олимпиад.
61. *М. Б. Балк, В. Г. Болтянский.* Геометрия масс.
62. *Р. Фейнман.* Характер физических законов.
63. *Л. Г. Асламазов, А. А. Варламов.* Удивительная физика.
64. *А. Н. Колмогоров.* Математика — наука и профессия.
65. *М. Е. Левинштейн, Г. С. Симин.* Барьеры: От кристалла до интегральной схемы.
66. *Р. Фейнман.* КЭД — странная теория света и вещества.
67. *Я. Б. Зельдович, М. Ю. Хлопов.* Драма идей в познании природы.
68. *И. Д. Новиков.* Как взорвалась Вселенная.
69. *М. Б. Беркинблит, Е. Г. Глаголева.* Электричество в живых организмах.
70. *А. Л. Стасенко.* Физика полета.
71. *А. С. Штейнберг.* Репортаж из мира сплавов.

Ответы, указания, решения

Узлы, зацепления и их полиномы

1. Перебросьте у узла $У_4$ на рисунке 1 (см. с. 11) дугу AB через весь узел справа налево на пунктирную линию. Дальнейшее распутывание очевидно.

2. После выполнения операции Ω_2^+ узел распутывается трехкратным применением операции Ω_1^+.

3. Это следует из того, что на диаграмме узла $У_2$ нигде нет конфигураций двойных точек, показанных на рисунках 4 *а*, *б* слева (см. с. 13).

4. Решение аналогично решению упражнения 3.

6. $1-x^2$.

7. $2x$; x^3+2x.

9. $x^6+5x^4+6x^2+1$; $x^7+6x^5+10x^3+4x$.

Указание. Обозначив $У$ и $З$ через L_7 и L_8 соответственно, определите по аналогии L_1, L_2, L_3, ..., L_n,... и докажите рекуррентное соотношение для их полиномов Конвея:

$$P_{L_n}=xP_{L_{n-1}}+P_{L_{n-2}},$$

применив аксиому III к любой двойной точке. После этого, начиная с известных значений полинома для L_2 и L_3 (это простейшее правое зацепление двух окружностей и узел трилистник соответственно!), последовательно найдите P_{L_4}, P_{L_5}, P_{L_6} P_{L_7} и P_{L_8}. Интересно, что рекуррентное соотношение, определяющее полиномы P_{L_n}, отличается лишь знаком от соотношения для знаменитых полиномов Чебышева.

Метод Лобачевского

1. Воспользоваться подстановкой $x=1/y$ и умножить все члены на y^n.

2. Если задано значение x_0, то воспользоваться подстановками $x=y+x_0$ и $y=1/z$.

Законы сохранения энергии и импульса

1. $Q=mgH+\dfrac{mMv^2}{2(M+m)}$.

2. $\Delta E=\dfrac{m_1m_2(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha)}{m_1+m_2}$.

3. $x_{\max}=\dfrac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}$.

4. $H_{\max}=\dfrac{Mv^2}{2g(M+m)}$.

5. $v_{\max}=2m\sqrt{\dfrac{gl}{M(M+m)}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Ленинградский государственный университет

Математика

Вариант 1

1. $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

2. $[1;\ 3]\cup[81;\ \infty)$.

3. $a=-64$, $b=8$; $a=0$, $b=0$; $a\in(0;\ 4)$, $b\in\mathbf{R}$; $a=4$; $b=2\pm\sqrt{2}$. Указание. Если $a\in(0;\ 4)$, то дискриминант первого уравнения $D=a^2-4a$ отрицателен. При этих значениях a множество решений первого уравнения будет пусто и потому будет частью множества решений второго уравнения независимо от значения b. Если $a\notin[0;\ 4]$, то $D>0$ и первое уравнение будет иметь два различных корня. Они будут корнями второго уравнения, только если коэффициенты уравнений пропорциональны, т. е. если $-a=b^2$, $a=-8b$, откуда $a=-64$, $b=8$. Случаи $a=0$ и $a=4$ рассматриваются без труда.

4.1. Указание. Пусть O — точка пересечения AE с DC. Из подобия треугольников DOG и OEC следует, что

$$\frac{OG}{OD}=\frac{OE}{OC},$$

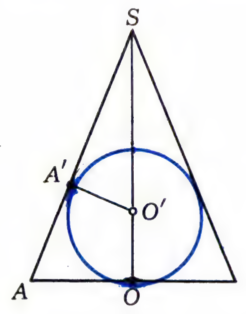
а из подобия треугольников DOA и OEF —

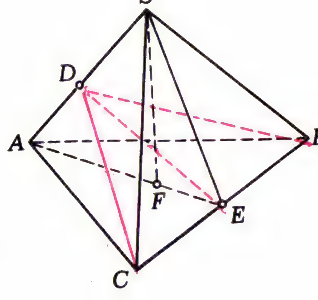
$$\frac{AO}{OD}=\frac{OE}{OF}.$$

Из этих соотношений вытекает равенство $\dfrac{OG}{OF}=\dfrac{AO}{OC}$, которое обеспечивает подобие треугольников OFG и OCA.

4.2. $\dfrac{\pi}{2}+1$. Указание. Первое неравенство задает квадрат с вершинами в точках $(-3;\ 0)$, $(-1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$, $(1;\ 0)$, а второе — круг с центром в точке $(-2;\ 0)$ радиусом 1.

5. $2V$. Указание. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 1). Пусть $OO'=R$, $SO=h$, $AO=x$. Из подобия треугольников $SO'A'$





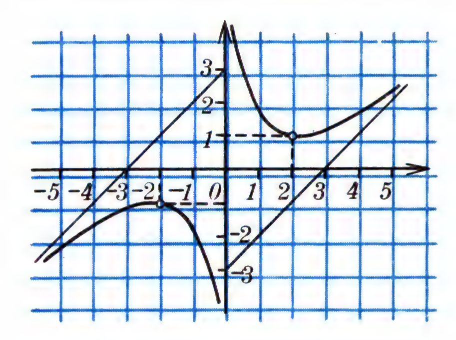




Рис. 1. *Рис. 2.* *Рис. 3.*

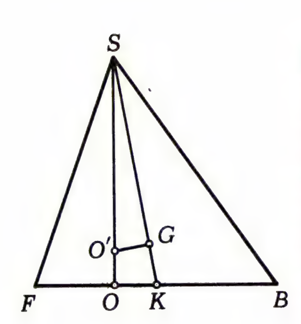


Рис. 4.

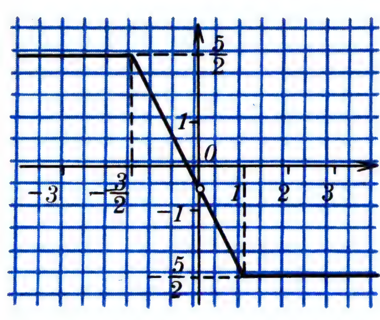


Рис. 5.

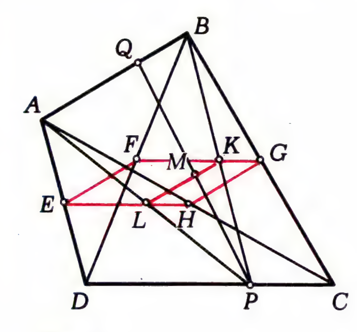


Рис. 6.

и SOA следует, что $\frac{SO'}{O'A'}=\frac{SA}{OA}$, т. е. $\frac{h-R}{R}=\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}$. Отсюда следует, что объем конуса $W(h)=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{h^2}{h-2R}$. Эта функция имеет минимум при $h=4R$, равный $2V$.

Вариант 2

1. 2, 7, 12 или 10, 7, 4. Указание. Условия задачи приводят к системе

$$2b=a+c,$$
$$(b-4)^2=(a-1)(c-3),$$
$$(a-1)(c-3)=b+2.$$

2. $\{1\}$.

3.1. $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3};\ 2\pi\right]$.

3.2. Объединение отрезков $\left[2k\pi+\arccos\frac{1}{4};\ 2(k+1)\pi-\arccos\frac{1}{4}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. Указание. Найдите сначала решения, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

4. $\sqrt{R(R-2r)}$. Указание. Пусть O и O' — центры вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$), H — середина основания AC, K — точка касания вписанной окружности со стороной BC, $BH=h$ — высота треугольника. Тогда $OO'=|BO-BO'|=|R+r-h|$. Если $\angle HBC=\alpha$, то по теореме синусов $BC=2R\cos\alpha$. Из треугольника BOK получим $\cos\alpha=\frac{\sqrt{h^2-2rh}}{h-r}$, что вместе с соотношением $h=BC\cos\alpha=2R\cos^2\alpha$ дает уравнение относительно h: $h=2R\sqrt{h^2-2rh}/(h-r)^2$, решая которое получим $h=R+r\pm\sqrt{R^2-2Rr}$.

5. 7:3. Указание. Пирамида $SABC$ разбивается на две пирамиды $ABCD$ и $SBCD$ с общим основанием и высотами AD и DS (рис. 2). Поэтому искомое отношение объемов равно DS/AD. Для нахождения этого отношения рассмотрите сечение SAE и воспользуйтесь тем, что $ED\cdot AS=SF\cdot EA$.

Вариант 3

1. 309. Решение. Пусть искомое число имеет вид $100x+10y+z$, где x, y, z — неизвестные цифры. Из условия следует, что

$$\begin{cases} x+y+z=12,\\ 299x+20y-97z=24.\end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 299 и вычитая второе, придем к уравнению

$$31y+44z=33\cdot 12,$$

откуда следует, что y должно делиться на 11. Поэтому $y=0$, $z=9$, $x=3$.

2. $\pi\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $\pm\arccos\sqrt{\frac{2}{7}}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. $\{0\}\cup\left[\frac{3}{2};\ 3\right)$.

4. См. рис. 3.

5. $\frac{1}{48}\pi\frac{R^3}{H^3}(\sqrt{4H^2+R^2}-R)^3$. Решение. Пусть E и D — середины сторон AB и CD — те точки, через которые проходит указанная в условии плоскость. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через B и высоту SO (рис. 4). Пусть K — точка пересечения отрезка ED с плоскостью SOB. По условию $FK=KB$, и потому $OK=\frac{R}{2}$. Центр интересующего нас шара O' лежит на SO и равноудален от FB и SK. Обозначим его радиус через r. Тогда $OO'=O'G=r$. Из подобия треугольников SGO' и SOK следует, что

$$\frac{r}{H-r}=\frac{R/2}{SK}=\frac{R}{2\sqrt{H^2+\frac{R^2}{4}}}=\frac{R}{\sqrt{4H^2+R^2}}.$$

Поэтому $r=\frac{R(\sqrt{4H^2+R^2}-R)}{4H}$.

Вариант 4

1. См. рис. 5.

2. $x=2$.

3. Объединение отрезков $\left[2\pi k-\arccos\frac{\pi}{6};\ 2\pi k+\arccos\frac{\pi}{6}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. Указание. Сначала решите неравенство на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

4. Искомое ГМТ — параллелограмм, образованный средними линиями EF, FG, GH, HE треугольников ABD, BCD, ABC, ACD (рис. 6). Указание. Рассмотрите сначала случай, когда отрезок CD вырождается в точку (рис. 7), и докажите, что тогда интересующее нас ГМТ — средняя линия KL треуголь-

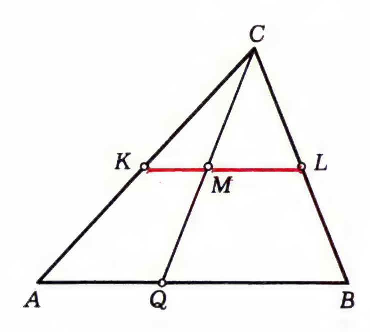


Рис. 7.

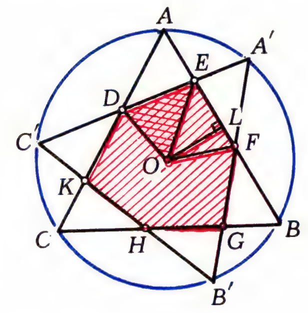


Рис. 8.

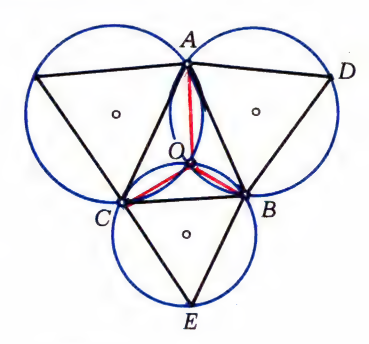


Рис. 9.

ника ABC, параллельная AB. Теперь легко разобраться и с общим случаем. Пусть M — произвольная точка параллелограмма $EFGH$. Проведем KL через точку M параллельно GH и BP через точку K. Рассмотрим треугольник BPA. Нетрудно проверить, что сторона PA проходит через точку L, а KL является средней линией этого треугольника. Следовательно, точка M — середина отрезка PQ, концы которого лежат на AB и CD. Тем самым, точка M принадлежит искомому ГМТ. Аналогично проверяется, что и произвольная точка искомого ГМТ принадлежит параллелограмму $EFGH$.

5. $\frac{3-\sqrt{3}}{12}a^2h$. Указание. Интересующее нас тело представляет собой пирамиду, основанием которой является шестиугольник $DEFGHK$ (рис. 8), а высотой — отрезок OS. Искомый объем V будет равен $\frac{1}{3}hS_{DEFGHK}$. Заметим, что $S_{DEFGHK}=6S_{EFO}$, так как все шесть треугольников — EFO, FGO, GHO, HKO, KDO и DEO — равны между собой (докажите это!). Найдем S_{EFO}. Из условия следует, что $OL=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Далее, $LE=OL$, так как $\angle LOE=\angle OEL=45°$. Поскольку $\angle LOF=60°-45°=15°$, то $FL=OL\cdot \operatorname{tg} 15°=\frac{a}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$. Итак,

$$S_{EFO}=\frac{1}{2}OL\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}+\frac{a}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})\right)=\frac{a^2(3-\sqrt{3})}{24}.$$

Вариант 5

1. $\{(3;\ 1);\ (5/3;\ 11/3)\}$.

2. $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$.

3. $(-3/2;\ -23/16)$.

4. Решение. Пусть O — точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и BCE (рис. 9). Так как дуги ADB и BEC равны 240°, то $\angle AOB=\angle BOC=120°$. Следовательно, $\angle AOC=120°$, и потому точка O будет лежать на окружности, описанной вокруг треугольника ACF. Итак, треугольник ABC разбивается на три треугольника, каждый из которых покрывается одним из данных кругов. Утверждение доказано.

5. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$. Указание. Пусть $B_1B_2...$ — сечение пирамиды $SA_1A_2...$ плоскостью, параллельной основанию $A_1A_2...$ Пусть V_1, V — объемы пирамид $SB_1B_2...$ и $SA_1A_2...$, а P_1, P — площади их боковых поверхностей. По условию $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{2}$. Заметьте теперь, что пирамиды $SB_1B_2...$ и $SA_1A_2...$ подобны с коэффициентом подобия $k=\frac{SB_1}{SA_1}$, следовательно, $\frac{V_1}{V}=k^3$, $\frac{P_1}{P}=k^2$.

Вариант 6

1. См. рис. 10.

2. $\pm\arccos\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$.

3. $(2;\ \sqrt[3]{11})$.

4. $7-\frac{4}{9}\pi+\frac{1}{3}$. Указание. Первое неравенство выделяет квадрат с вершинами $(-2;\ 1)$, $(0;\ -1)$, $(0;\ 3)$, $(2;\ 1)$. Второе неравенство можно преобразовать к виду

$$x^2+\left(y+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

так что оно выделяет область, лежащую вне круга с центром в точке $\left(0;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и радиусом $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

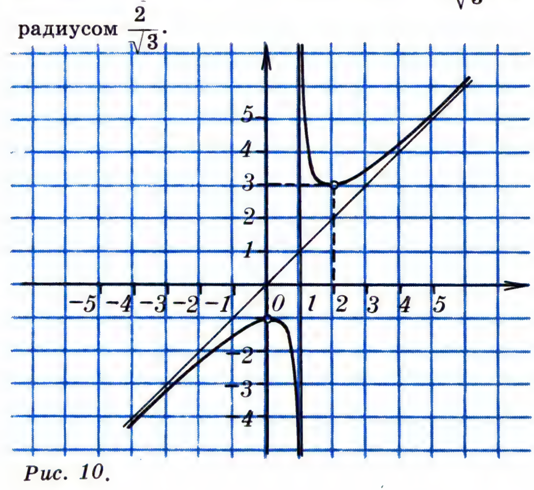


Рис. 10.

5. 1/11. Указание. Пусть h — высота призмы, S — площадь ее основания. Объем пирамиды равен $\frac{1}{12}hS=\frac{1}{12}V$.

Вариант 7

2. $2k\pi\pm\arccos\frac{1}{4}$, $k\in Z$.
3. $(-2; -\sqrt{3}]\cup(1; \sqrt{3}]$.
4. $\min f(x)=f(4)=2\sqrt{2}$; максимального значения нет. $x\in(3; 5)$.

Физика

Вариант 1

1. Силы, действующие на бруски, показаны на рисунке 11. Запишем условия равновесия правого бруска:

$$N_1=mg,\ N=F_{тр},$$
$$Nb\cos\alpha=\frac{1}{2}(b\sin\alpha-a\cos\alpha)mg.$$

Кроме того, необходимо, чтобы бруски не скользили и не опрокидывались. Рассмотрим эти условия последовательно.
Условие отсутствия скольжения имеет вид

$$F_{тр}<\mu N_1.$$

Тогда получаем

$$N=\frac{1}{2}mg\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{a}{b}\right)<\mu mg,$$

и

$$\alpha<\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}+2\mu\right). \qquad (1)$$

Отсутствие опрокидывания правого бруска (брусок не встает вертикально) эквивалентно условию $N>0$, т. е.

$$\frac{1}{2}mg\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{a}{b}\right)>0,$$

что дает

$$\alpha>\operatorname{arctg}\frac{a}{b}. \qquad (2)$$

Чтобы найти условие отсутствия опрокидывания левого бруска, рассмотрим предельный случай начала опрокидывания. В этом случае сила реакции N_1 приложена к левой стороне основания, и условие равновесия моментов сил имеет вид

$$Nb\cos\alpha=\frac{1}{2}mga.$$

Опрокидывания не будет при

$$Nb\cos\alpha<\frac{1}{2}mga,$$

или

$$\frac{1}{2}mg(b\sin\alpha-a\cos\alpha)<\frac{1}{2}mga,$$

откуда

$$\alpha<2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}. \qquad (3)$$

Совместное выполнение условий (1)—(3) приводит к ответу

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{b}<\alpha<\min\left\{2\operatorname{arctg}\frac{a}{b};\ \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}+2\mu\right)\right\}.$$

2. Из рисунка к условию задачи видно, что искомая работа равна

$$A=A_{23}-A_{41}=(p_2-p_1)(V_4-V_1)=$$
$$=R(T_3-T_4-T_2+T_1).$$

Используя условие задачи и уравнение состояния идеального газа, получим

$$T_2=T_4=\sqrt{T_1T_3}.$$

Тогда окончательно

$$A=R(T_1-2\sqrt{T_1T_3}+T_3)=R(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1})^2.$$

3. В любой момент времени напряжение на резисторе равно напряжению на катушке индуктивности, которое по величине совпадает с ЭДС самоиндукции в катушке. Поэтому сила тока в резисторе

$$I_R=\frac{U_R}{R}=\frac{L}{R}\frac{\Delta I_L}{\Delta t},$$

где I_L — сила тока в катушке. За малый промежуток времени Δt через резистор пройдет заряд

$$\Delta Q=I_R\Delta t=\frac{L}{R}\Delta I_L.$$

В начальный момент времени $I_L=0$, установившийся ток в катушке $I_L=\mathscr{E}/r$, поэтому полный прошедший заряд

$$Q=\frac{L}{R}I_L=\frac{\mathscr{E}L}{Rr}.$$

4. $\Gamma=2\Gamma_1\Gamma_2/(\Gamma_1+\Gamma_2)$.

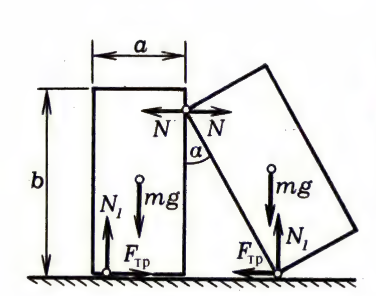


Рис. 11.

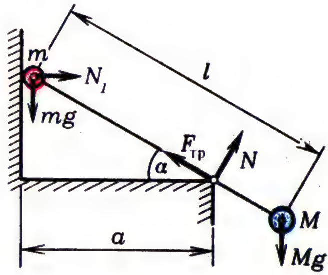


Рис. 12.

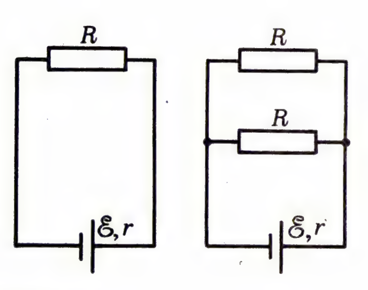


Рис. 13.

Вариант 2

1. Силы, действующие на систему, приведены на рисунке 12. Условия равновесия системы записываются в виде

$$N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha = (M+m)g,$$
$$N\sin\alpha + N_1 = F_{\text{тр}}\cos\alpha,$$

$$Mgl\cos\alpha = \frac{Na}{\cos\alpha}.$$

Условие отсутствия скольжения стержня $F_{\text{тр}} < \mu N$ дает

$$(M+m)g < N(\cos\alpha + \mu\sin\alpha),$$

или

$$\left(\frac{m}{M}+1\right) < \frac{l}{a}\cos^2\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha).$$

Стержень не будет поворачиваться вправо, если $N_1 > 0$, т. е.

$$1+\frac{m}{M} > \frac{l}{a}\cos\alpha.$$

Учитывая очевидное условие $l\cos\alpha > a$, получим ответ в форме цепочки трех неравенств:

$$1 < \frac{l}{a}\cos\alpha < 1+\frac{m}{M} < \frac{l}{a}\cos^2\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha).$$

Для одновременного выполнения двух последних ограничений необходимо, чтобы

$$\cos\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha) > 1,$$

т. е.

$$\mu > \operatorname{tg}\alpha.$$

Если же $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, равновесие невозможно.

2. Количество теплоты, полученное в циклах *1—2—3—1* и *1—2—3—4—1*, одно и то же, а работа в первом цикле вдвое меньше, чем во втором, поэтому

$$\eta_I = \eta/2.$$

Количество теплоты, полученное в цикле II, равно количеству теплоты, отданному в цикле I, поэтому

$$Q_{II\ \text{пол}} = Q_{1-3} = Q_{1-2-3} - A_I = Q_{1-2-3}(1-\eta_I).$$

Работа A_{II} равна A_I. Следовательно,

$$\eta_{II} = \frac{A_{II}}{Q_{1-3}} = \frac{A_I}{Q_{1-2-3}(1-\eta_I)} = \frac{\eta_I}{1-\eta_I} = \frac{\eta}{2-\eta}.$$

3. Заряд, который пройдет по цепи, $q = C\mathscr{E}$. Работа источника $A = q\mathscr{E} = C\mathscr{E}^2$. Энергия конденсатора в конце зарядки $W = 1/2\, C\mathscr{E}^2$. Разность $A - W$ есть количество теплоты, выделившееся в схеме. Учитывая, что сопротивления R и r включены последовательно, найдем количество теплоты, выделившееся в резисторе:

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{RC\mathscr{E}^2}{(R+r)}.$$

4. $\gamma = \Gamma_1\Gamma_2$.

Вариант 3

1. Время движения всего поезда

$$t = \frac{t_1^2+t_2^2}{2t_2}.$$

Общее число вагонов (по исходным данным)

$$n = \left(\frac{t_1^2+t_2^2}{2t_1t_2}\right)^2,$$

и это число, разумеется, должно быть целым. Безукоризненный ответ, следовательно, выглядит так:
если исходные данные таковы, что $((t_1^2+t_2^2)/(2t_1t_2))^2 \in \mathrm{N}$, искомое время $t = (t_1^2+t_2^2)/(2t_2)$;
если $((t_1^2+t_2^2)/(2t_1t_2))^2$ не является целым числом, задача решения не имеет.

2. $A = R(T_1+T_3-2\sqrt{T_1T_3})$. Указание: изобразите указанный процесс в координатах p, V.

3. Простейшая схема изображена на рисунке 13. Она удовлетворяет условию задачи, если ЭДС источника

$$\mathscr{E} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}RP}$$

и его внутреннее сопротивление

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

4. $S_1S_2 = 2a\cos\alpha$.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $\log_2(6/5)$.
2. $1/36 < x < \sqrt[4]{6}$.
3. 9. Указание. Первые три члена прогрессии представьте в виде aq^{-1}, a, aq.
4. $\left(0; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ Указание. Первое неравенство преобразуется в равносильное ему неравенство $\sin 2x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0$. Изучите знаки функций $\sin 2x$ и $\cos x - \frac{1}{2}$ на промежутке $0 < x < \pi$.
5. $6/5$. Указание. Пусть радиус шара равен 1, а высота конуса — x. Тогда $\frac{RS}{V} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\times(2x-x^2)\sqrt{x}$; $x \in [0; 2]$. Изучая с помощью производной множество значений функции $f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{4}(2x^{3/2} - x^{5/2})$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$, убедитесь, что функция $f(x)$ принимает свое наибольшее значение, равное $\frac{36\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}$, в точке $x = \frac{6}{5}$.

Вариант 2

1. $\{5^{2/5}; 5\}$.
2. $\pi k + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\pi k - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$, $k \in \mathrm{Z}$.
3. $(-5/3; 2/3) \cup (6/7; 4)$. Указание. Возведите обе части неравенства в квадрат, затем перенесите правую часть налево и разложите на множители разность квадратов.

4. $r=\frac{\sqrt{21}-3}{16}R$. Указание. Центры обеих окружностей и точка их касания лежат на одной прямой.

5. $\{-2; \frac{33}{16}\}$. Указание. Так как $A\neq 0$, $C\neq 0$, должно быть

$$\frac{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{C}\right)x+\frac{B-1}{AC}}{x^2+\left(\frac{B}{A}-\frac{1}{C}\right)x-\frac{B}{AC}}=\frac{3x-\frac{3}{2}}{x^2-\frac{7}{4}x+\frac{D}{4}}.$$

Если две функции тождественно равны, то равны их значения в любой точке из области определения. Выбирая произвольно эти точки, можно составить систему из четырех уравнений для нахождения A, B, C, D. Однако удобнее поступить иначе. Обе дроби определены везде, кроме корней знаменателей, а коэффициенты приведенных квадратных трехчленов, стоящих в знаменателях, однозначно выражаются через эти корни по теореме Виета, и потому соответственно равны. Следовательно, $\frac{B}{A}-\frac{1}{C}=-\frac{7}{4}$; $-\frac{B}{AC}=\frac{D}{4}$. Так как знаменатели равных дробей равны, равны и их числители. Приравнивая значения числителей при $x=0$ и $x=1$, получим $\frac{B-1}{AC}=-\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{A}+\frac{1}{C}=3$. Решая полученную систему, найдем два значения D.

Физика

1. $F_{\min}=mg\frac{\mu\cos\alpha}{2(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}$.
2. $x_{\min}=l(T-3mg)/(T-mg)$.
3. $F_{\min}=\mu g(m_1+m_2/2)$.
4. $T\geqslant\frac{p_0VT_0\mathrm{M}}{p_0V\mathrm{M}-mRT_0}\approx 548$ К.
5. $m=m_0\frac{\mathrm{M}(p_0+\rho gh)}{\rho RT-\mathrm{M}(p_0+\rho gh)}\approx 0{,}6\cdot 10^{-3}$ кг; равновесие неустойчивое.
6. $r_{\min}=\frac{r}{1+\frac{m_1m_2(v_1+v_2)^2r}{(m_1+m_2)kq_1q_2}}$.
Указание. При $r=r_{\min}$ относительная скорость зарядов равна нулю.
7. $q=\varepsilon_0SE=8{,}85\cdot 10^{-11}$ Кл.
8. $\alpha_{\min}=\arcsin(n/k^N-1)$.
9. $x=R/(n-1)$.
10. $L_{\max}=hc(\lambda_{\max}-\lambda)/(eE\lambda_{\max}\lambda)\approx 1{,}5\cdot 10^{-2}$ м.

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) $x=(1\pm\sqrt{5})/2$. Указание. Выполните замену $y=x^2-x$.

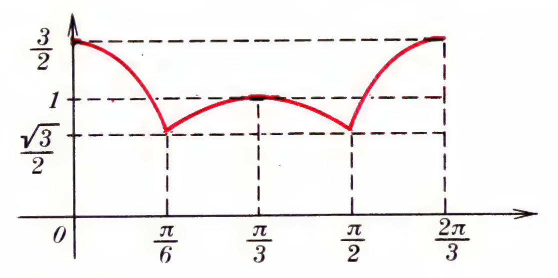


Рис. 14.

б) $\max f(x)=f(1/2)=35/16$. Указание. Поскольку $y\geqslant-\frac{1}{4}$, наибольшее значение функции f достигается при $y=-1/4$, т. е. при $x=1/2$.
в) 1 корень при $a=39/16$, 2 корня при $a<39/16$, нет корней при $a>39/16$. Указание. Рассмотрите систему $S(y)=y+a$, $y\geqslant-1/4$.

2. а) $|\cos\alpha|+\left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\right|$. Указание. $AK=AC|\cos\alpha|=|\cos\alpha|$, $CL=AC|\cos\angle ACL|=\left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\right|$.

б) $\frac{\pi}{3}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Указание. Рассмотрите 3 случая: $\alpha\in\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$.
в) См. рис. 14.

3. а) $\sin f(x)=f(1)=-1$.
б) 2 корня. Указание. Функция f убывает при $x<1$ и возрастает при $x>1$.
в) $a=1\pm\sqrt{5}$.
г) $-2\leqslant x\leqslant 2$. Указание. Уравнение $x^4-2ax+a^2-2=0$ — квадратное относительно a, поэтому $a=x\pm\sqrt{2+x^2-x^4}$. Неотрицательность дискриминанта означает, что $|x|\leqslant 2$.

Вариант 2

1. а) $x>3$.
б) $\min f(x)=f(1)=\sqrt{2}-1$.
в) 1 корень при $a<1$ и $a=5/4$, 2 корня при $a\in[1; 5/4)$, нет корней при $a>5/4$. Указание. Выполнив замену $y=\sqrt{x+1}$, получите квадратное уравнение $y^2-y+a-1=0$. Остается выяснить, при каких a у этого уравнения есть неотрицательный корень.

2. а) Указание. Примените теорему косинусов к треугольникам MAC и MAB.
б) Корней нет.
в) $3\sqrt{2}/2$.

3. а) $S(a)=|6a^2+6a+1|$. Указание. Пусть D — середина отрезка AC, тогда $S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot BD=S_{ADC}$, откуда $S_{ABC}=BD=\left|f(a)-\frac{f(a+1)+f(a-1)}{2}\right|=|6a^2+6a+1|$.
б) $-1/2$, $(-3\pm\sqrt{6})/2$.

в) Нет корней при $b<0$; 2 корня при $b=0$ и $b>\frac{1}{2}$, 3 корня при $b=1/2$, 4 корня при $0<b<1/2$.

Физика

1. $R=lv_1/(v_1-v_2)=0{,}6$ м; $\omega=v_1/R=10$ с$^{-1}$.
2. $E_k=m(gH+v_0^2/2)=250$ Дж; $v_h=\sqrt{2(E_k-mgh)/m}=17{,}3$ м/с.
3. $F_л=0{,}4mg=400$ Н; $F_п=0{,}6mg=600$ Н; $F_{min}=mg/3=333$ Н.
4. $l_1=\Delta l n_2^2/(n_1^2-n_2^2)=0{,}09$ м; $l_2=l_1+\Delta l=0{,}25$ м; $T_1=2\pi\sqrt{l_1/g}=0{,}6$ с; $T_2=2\pi\sqrt{l_2/g}=1$с.
5. $p_2=p_1(1-k)T_2/T_1=56$ кПа.
6. $\Delta T=\mathbf{M}A/(mR)=40$ К; $Q=A+(3/2)\times(m/\mathbf{M})R\Delta T=2{,}5$ кДж; здесь $\mathbf{M}=4\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гелия.
7. Искомая точка находится на прямой, проходящей через заряды, и отстоит от заряда q_2 на $x=l/\sqrt{q_1/|q_2|}-1\doteq0{,}24$ м, а от заряда q_1 — на $x+l=0{,}34$ м.
8. $r=R^2/R_V=0{,}1$ Ом.
9. $\delta=90^\circ-\arcsin(1/n)=41^\circ$.
10. $f=d\sqrt{k}=2{,}5$м; $F=df/(d+f)=0{,}23$ м.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

1. Указание. Превратите произведение синусов в разность косинусов.
2. а) $\{2;\ 2\}$; б) $\{1;\ 5\}$; в) $\{1,\ 5\}$; г) $\left\{\frac{1}{3};\ 9\right\}$.
3. а) $\left[-\frac{10}{13};\ 2\right)\cup[3;\ \infty)$; б) $\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\ 1\right)$; в) $(0;\ 4)$; г) $(-\infty;\ 2)$.
4. $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)\cup(1;\ \infty)$.
7. 24.
8. $\frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$.
9. $\frac{\pi a^3}{24}\sin^3\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.
10. $\frac{3\sqrt{3}}{16}d^3\sin2\alpha\cdot\sin\alpha$.
11. $6\sqrt{3}b^3\operatorname{tg}\beta$.
13. $\frac{1}{2}$.
15. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; в) $\{2\}$.
16. а) $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$; б) $(2;\ \infty)$; в) $1;\ \infty)$.
17. а) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ 3)$; б) $(-1;\ 2)$; в) $\left(\frac{1}{2};\ 4\right)$.
18. $\sqrt{7}$.
19. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a наибольшую площадь имеет прямоугольный равнобедренный треугольник с боковой стороной равной a.
20. $\frac{1}{3}P\cdot\cos\beta\sqrt{\frac{P\cdot\sin\beta}{\pi}}$.
21. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{2}+a^2$.
22. $65\sqrt{3}$.

О давлении

(см. «Квант» № 3)

1. Медведь оказывает на снег меньшее давление, чем лось: у медведя лапы широкие, шире, чем копыта у лося, а вес у них примерно один и тот же.
2. На небольших высотах над уровнем моря можно считать, что давление уменьшается на 1 мм рт. ст. при подъеме на каждые 12 м. Исходя из этого вычислим, на сколько уменьшается давление при подъеме на 7500 футов. Учитывая, что 1 фут $\approx0{,}3$ м, находим

$$\Delta p\approx\frac{(7500\cdot0{,}3)\text{ м}}{12\text{ м/мм рт. ст.}}\approx187\text{ мм рт. ст.}$$

Если у поверхности земли (на уровне моря) давление было нормальным, то на высоте 7500 футов барометр показал

$$(760-187)\text{ мм рт. ст.}=573\text{ мм рт. ст.}$$

Бросается в глаза несоответствие между давлением воздуха (0,495 мм рт. ст.) и высотой (11 700 футов), на которой находились путешественники. Очевидно, в цитируемой книге (Ж. Верн. Дети капитана Гранта.— Л.: Детская литература, 1985, с. 86) допущена опечатка.

3. Махотка действовала подобно медицинской банке. При нагревании часть воздуха из махотки вышла; по мере остывания давление воздуха в закрытой махотке падало, стало меньше атмосферного; поэтому мягкий живот «втянуло» внутрь сосуда.
Когда махотку разбили, окружающий воздух устремился к разбитому сосуду, в область пониженного давления.
4. Давление на глубине определяется преимущественно высотой водяного столба, а не увеличением плотности воды. Плотность воды почти не зависит от величины внешнего давления (вода практически несжимаема).
5. Если вы не можете сами ответить на поставленные вами вопросы к отрывку из рассказа Б. Житкова «На воде», то присылайте эти вопросы в редакцию — мы постараемся ответить на них.
6. Воздушный фронт, приносящий ненастную погоду,— это, как правило, влажный воздух. Плотность влажного воздуха меньше, чем сухого. Поэтому к ненастью атмосферное давление уменьшается (барометр «падает»).
7. Дым от костра поднимается вверх за счет архимедовой силы. При надвижении воздушного фронта, приносящего с собой дождь, давление падает — уменьшается плотность воздуха. Это приводит к уменьшению архимедовой силы.

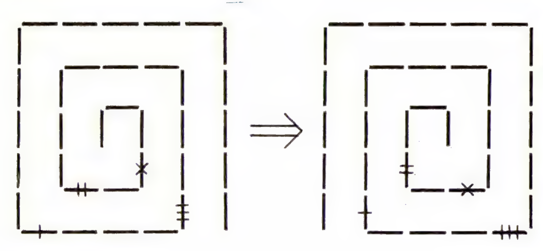


Рис. 15.

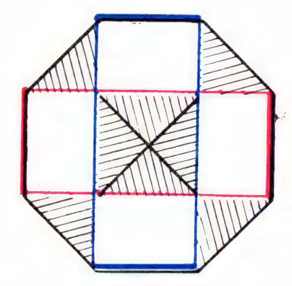


Рис. 16.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. Не может. Одна из сумм обязательно является четным числом, а произведение — нечетно.
2. См. рис. 15.
3. Это можно сделать разными способами, например так: 458—45—90—9—18—36—72—7—14.
4. Нет. Решение. Сначала заметим, что цифры 5 и 7 должны стоять и слева, и справа, поэтому $A \cdot H = 5 \cdot 7$. Из того, что оставшиеся произведения равны, следует, что степени числа 2 в этих произведениях равны, но множитель 2 среди чисел от 1 до 9 встречается 7 раз, поэтому он не может быть одинаковое число раз слева и справа.
5. См. рис. 16.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров,
Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,
Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представили:
А. А. Новожилов, И. В. Тугов,
Фотохроника ТАСС

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 25.01.89. Подписано к печати 13.03.89. Т-08940. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09 Уч.-изд. л. 8,30. Тираж 189232 экз. Заказ 58

Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

длина отрезка умножится на $12 \cdot \frac{1}{6} = 2$, так что $f'(2) = 2$.

Повторяя то же рассуждение для любой точки x, мы получим такое правило:

> если $f(x) = h(g(x))$,
> то $f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x))$.

Это же, разумеется, верно для любых функций h и g.

В нашем случае, когда $h(t) = \sqrt{t}$, $g(x) = x^3 + 1$, $f(x) = \sqrt{x^3+1}$, получаем

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}.$$

Итак, мы получили известную вам из учебника формулу для производной сложной функции. Можно записать аналогичную формулу и для случаев, когда f — композиция не двух, а трех, четырех и т. д. функций.

Обратная функция

На рисунке 4 изображена уже привычным нам способом функция $f(x) = x^3 + 1$. Сплошные стрелки на этом рисунке показывают, как точки x синей оси переводятся в точки $y = x^3 + 1$ красной оси. А теперь представим себе, что рисунок 4 задает закон, по которому, наоборот, точки с красной оси переходят на синюю (стрелки, идущие вверх на рисунке)— точки $y = x^3 + 1$ переходят в точки x. Можно выразить x через y формулой $x = \sqrt[3]{y-1}$. Получилось описание новой функции. Обозначим ее буквой g: $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$. Функция $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ называется *обратной* к функции $f(x) = x^3 + 1$. Заметим, что в формуле, определяющей функцию g (как и вообще во всякой формуле, определяющей функцию), независимую переменную y можно обозначить любой буквой. Можно, например, записать $g(t) = \sqrt[3]{t-1}$ или даже $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

Заметим еще, что не у всякой функции существует обратная. Возьмем, например, функцию $f(x) = x^2$. Эта функция переводит и точку 2, и точку (—2) в точку 4. Если g — обратная к функции f, то, спрашивается, чему должно быть равно $g(4)$: 2 или —2 (рис. 5,*а*)? Иногда с этой неприятностью можно бороться следующим образом: рассмотреть функцию f не на всей ее области определения, а только на такой ее части, где f не может перевести две разные точки в одну. Функцию $f(x) = x^2$ можно, в частности, рассмотреть на интервале $[0; +\infty)$. Тогда обратная функция g уже будет существовать; это не что иное, как хорошо известный «арифметический квадратный корень»: $g(y) = \sqrt{y}$ (рис. 5,*б*).

Самый распространенный на практике случай, когда функция, обратная к данной, заведомо существует — это если данная функция определена на некотором интервале и является на этом интервале возрастающей или убывающей.

Производная обратной функции

Посмотрим еще раз на рисунок 5,*б*. Отрезки, близкие к точке 3, растягиваются функцией $f(x) = x^2$ в $f'(3) = 6$ раз и переходят в отрезки, близкие к точке $f(3) = 9$. Значит, отрезки, близкие к точке 9, переводятся обратной к $f(x) = x^2$ функцией $g(y) = \sqrt{x}$ в отрезки, в 6 раз меньшие, т. е. «растягиваются» в 1/6 раза. Стало быть, $g'(9) = 1/6$. Найдем и производную $g'(y)$ в любой точке y: отрезки, близкие к точке x, растягиваются функцией $f(x) = x^2$ в $f'(x) = 2x$ раза. Значит, отрезки, близкие к точке $y = x^2$, растягиваются обратной к f функцией g в $1/(2x)$ раза. Осталось выразить этот коэффициент растяжения через y: $x = \sqrt{y}$, так что $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, и $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Мы получили формулу для производной функции «квадратный корень». Впрочем, эта формула должна быть вам хорошо известна. Найдем этим приемом менее известную вам производную функции $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Согласно определению, эта функция — обратная к функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, рассматривае-

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

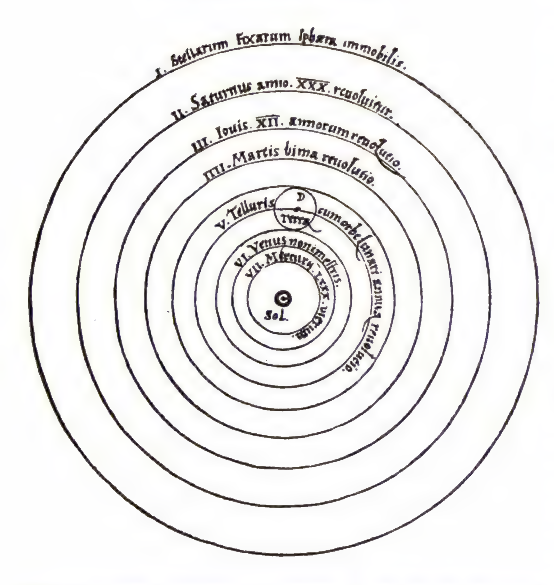
В середине всех этих орбит находится Солнце, ибо может ли прекрасный этот светоч быть помещен в столь великолепной храмине в другом, лучшем месте, откуда он мог бы все освещать собой?

Н. Коперник



А так ли хорошо знакомо вам

орбитальное движение?

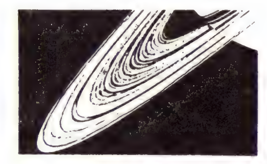


От попыток древних отыскать закономерности в движении планет — «блуждающих звезд» — до работ Коперника пролегли века. Фактически трудами Коперника и его последователей был совершен гигантский шаг, определивший все дальнейшее развитие астрономической науки. Безусловно, с той поры человечество неизмеримо обогатило свои возможности — вплоть до возможности изучать устройство Солнечной системы непосредственно с межпланетных аппаратов. Однако современные космические исследования не привели к пересмотру фундаментальных законов движения планет, установленных еще во времена лишь наблюдательной астрономии. Более того, вы убедитесь, что с их помощью можно справиться с задачами, которые и возникли только с наступлением космической эры.

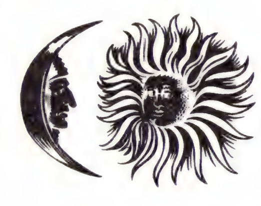
Вопросы и задачи

1. Когда жители Земли движутся быстрее вокруг Солнца — в полдень или в полночь?

2. Когда Земля быстрее движется по своей орбите вокруг Солнца — зимой или летом?

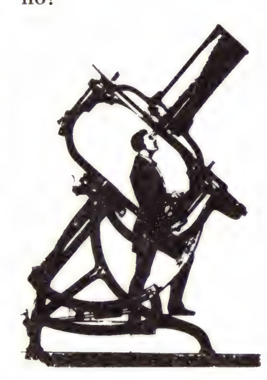


3. Астрономы установили, что скорости отдельных частей кольца Сатурна не пропорциональны их расстояниям до оси вращения. К какому выводу о структуре кольца должно было привести это открытие?



4. Солнце притягивает Луну почти в два раза сильнее, чем Земля. Почему же Луна — спутник Земли, а не самостоятельная планета?

5. Могут ли планета или спутник двигаться по эллиптической орбите равномерно?

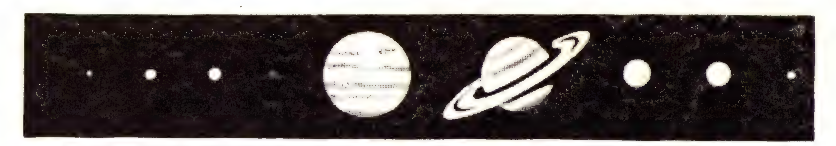


6. Почему нельзя запустить спутник, который бы постоянно вел наблюдения над районом Земли, расположенным на определенной широте?

7. Можно ли с помощью третьего закона Кеплера сравнить периоды обращения Земли и Луны?



8. Угловая скорость вращения гипотетической планеты такова, что в районе экватора тела находятся в состоянии полной невесомости. Что нужно сделать, чтобы сообщить там предмету первую космическую скорость?





9. Представьте, что на стол, обращающийся по орбите вокруг Солнца, «положили» Землю. С какой силой она будет давить на стол?

10. Как изменяется линейная скорость спутника, движущегося по орбите в разреженной атмосфере Земли, из-за сопротивления воздуха?

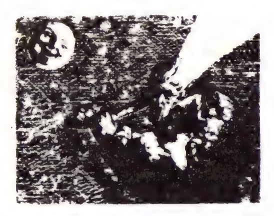


Мысленный микроопыт

Вообразите себя на месте космонавта, возвращающегося на космический корабль с «избытком» скорости. Можно ли набить шишку, стукнувшись о корабль? Ведь дело происходит в невесомости...

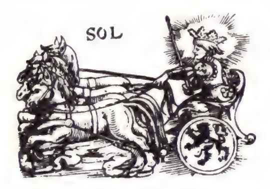
Любопытно, что...

...Марк Твен родился через две недели после появления кометы Галлея в 1835 году, а умер на следующий день после ее максимального сближения с Солнцем в 1910 году. Незадолго до этого Твен в шутку заявил приятелям, что поскольку он родился в год очеред-



ного появления кометы Галлея, то он и умрет сразу после ее следующего возвращения.

...несмотря на свою принципиальную порочность, система



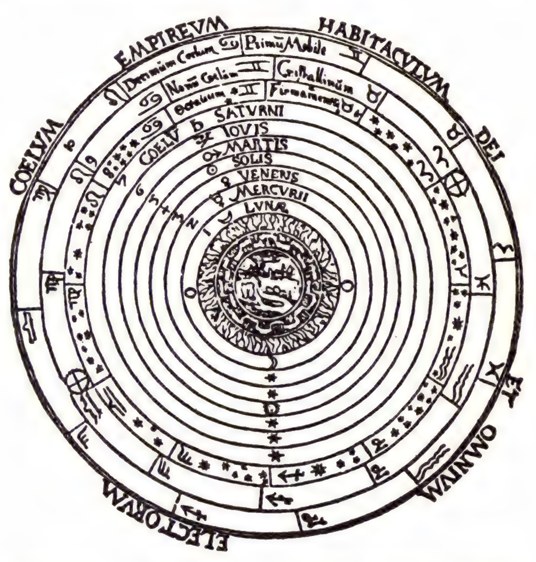
Птолемея позволяет предсказывать небесные явления с любой степенью точности. С ее помощью, как это ни парадоксально, можно было бы решать некоторые задачи современной космонавтики, например вычислять видимые на небе траектории космических аппаратов.



...среди астрономов в последние годы распространилась гипотеза: у Солнца есть «напарник», который может обращаться вокруг общего с Солнцем центра масс по весьма вытянутой эллиптической орбите. Это предположение получило поддержку палеонтологов, установивших определенную цикличность вымирания видов животного и растительного мира на Земле. Катастрофы связывают с падением «дождя» комет, вызванного сближением «напарника» с Солнцем. Весь путь по орбите отнимает у солнечного «собрата» не менее 26 миллионов лет, причем сейчас он находится на весьма удаленном от нас участке своей траектории, и потому-то его до сих пор никто не обнаружил.







Что читать в «Кванте» об орбитальном движении (публикации последних лет)

1. «Законы Кеплера и школьная физика» — 1986, № 2, с. 49;
2. «Вторая космическая скорость» — 1986, № 3, с. 21;
3. «Как движется Луна?» — 1986, № 4;
4. «Полет к Солнцу» — 1986, № 4, с. 18;
5. «Парадокс спутника» — 1986, № 5, с. 14;
6. «Маневрирование в космосе» — 1987, № 2, с. 48;
7. «Закон всемирного тяготения» — 1987, № 11, с. 36;
8. «Калейдоскоп «Кванта» — 1987, № 11.

(Начало см. на с. 36)

мой на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 6). Отрезки, близкие к точке x, растягиваются функцией f в $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ раз. Значит, отрезки, близкие к точке $y=\text{tg}\,x$, растягиваются функцией g в $\left(1:\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\cos^2 x$ раз. Стало быть, $g'(y)=\cos^2 x$. Осталось только выразить правую часть через y. Для этого воспользуемся тождеством $\cos^2 x=\frac{1}{1+\text{tg}^2 x}$. Из него получим, что

$$g'(y)=\frac{1}{1+\text{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}.$$

Итак, $(\text{arctg}\,y)'=\frac{1}{1+y^2}$. Интересно, что производная от обратной тригонометрической функции задается совсем простым выражением, не содержащим ничего, связанного с тригонометрией.

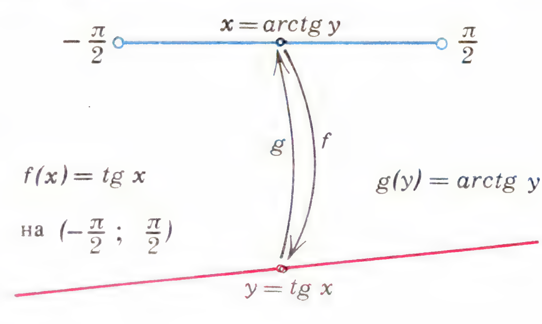


Рис. 6.

С. М. Львовский

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Натуральные числа m и n таковы, что $m>n$, m не делится на n и имеет от деления на n такой же остаток, как $m+n$ от деления на $m-n$. Найдите отношение $m:n$.

2. Докажите, что всякая бесконечная арифметическая прогрессия, составленная из натуральных чисел, содержит бесконечную геометрическую прогрессию.

3. При каких a и b уравнение $x^2+a|x|+b=0$ имеет 4 решения?

4. Внутри квадрата со стороной 1 нарисован треугольник, каждая из сторон которого не меньше 1. Докажите, что центр квадрата лежит внутри этого треугольника.

5. На плоскости даны две неравные окружности. Найдите геометрическое место середины отрезков, соединяющих точки одной окружности с точками другой.

Девятый класс

6. Решите уравнение

$$2^{[x^2-4]}=3^{[1/x]}.$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{99}y^{99}+3x^2-y^2=3,\\ x^{99}y^{99}+2x^2-2y^2=1,\\ x^{99}y^{99}-x^2-3y^2=-3.\end{cases}$$

8. Многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ принимает во всех целых точках x целые значения. Может ли один из его коэффициентов a_i равняться 1/13?

9. Сколько положительных чисел есть среди первых ста членов последовательности

$$\sin 1°,\ \sin 10°,\ \sin 100°,\ \sin 1000°,\ \ldots\quad ?$$

10. Проекции некоторого отрезка на две стороны правильного треугольника равны 2 и 3. Найдите проекцию этого отрезка на третью сторону.

Десятый класс

11. а) Самая короткая сторона треугольника имеет длину $a=1$, самая длинная — длину $b=2$, один из углов равен $\varphi=30°$. Найдите длину третьей стороны. б) Какое наибольшее число решений может иметь предыдущая задача при надлежащем подборе чисел a, b, φ (разумеется, $a>0$, $b>0$, $0<\varphi<180°$)?

12. Кубическое уравнение и квадратное уравнение, оба со старшим коэффициентом 1 и с рациональными коэффициентами, имеют общее решение. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональное решение.

13. Минимум функции $y=(x-a)^4+(x-b)^4+(x-c)^4$ равен 0, а минимум функции $y=(x-a)^4+2(x+b)^4+(x-c)^4$ равен 4. Найдите a, b и c.

14. Найдите все x, при которых

$$\sin x\leqslant\sin 2x\leqslant\ldots\leqslant\sin 10x.$$

15. Докажите, что в сечении плоскостью трехгранного угла, у которого все плоские углы прямые, может получиться любой остроугольный треугольник.

Публикацию подготовил
Д. Б. Фукс

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 34)

М. Пискарев (Баку) **18**; *О. Пихурко* (Нестеров Львовской обл.) **18**; *К. Погосян* (Ереван) **18**; *А. Подобряев* (Волгоград) **09, 18, 19**; *М. Поляков* (Москва) **18**; *Д. Пулатов* (Ташкент) **18**; *В. Рагулин* (Москва) **07—09, 18, 19**; *А. Распереза* (Брест) **07, 08, 18**; *И. Рахметов* (с. Тюкла АзССР) **07**; *Л. Рахметов* (с. Тюкла АзССР) **07**; *М. Рвачев* (Винница) **18**; *Л. Рябова* (Клин) **07**; *Э. Сабиров* (Красногорск) **18**; *А. Серебряков* (Москва) **08, 09, 18, 19**; *С. Сидоренко* (Харьков) **07, 18**; *О. Ситницкий* (Харьков) **07**; *А. Скабелин* (Барановичи) **18**; *А. Скалкова* (Киев) **07**; *А. Скопенков* (Саратов) **07—10, 18, 19**; *Г. Тартаковский* (Гайворон) **07, 09**; *Г. Тер-Саакое* (Баку) **07, 18**; *С. Тер-Саакое* (Баку) **07, 18**; *С. Тихонов* (Воронеж) **07—09, 18, 19**; *Д. Турсунов* (Караганда) **08, 18**; *А. Тютенков* (Усть-Каменогорск) **18**; *К. Ушаков* (Киев) **07, 18, 19**; *А. Федотов* (Красноярск) **18**; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **07—09, 18, 19**; *Р. Хайруллаев* (Новосибирск) **18**; *М. Хасидовский* (Ташкент) **08, 09, 18, 19**; *Р. Христюк* (Киев) **07**; *Ж. Хужамов* (Шовотский район Хорезмской обл.) **07**; *В. Цветков* (София, НРБ) **18**; *А. Цинкер* (Ташкент) **09, 18**; *Н. Черепанова* (Целиноград) **18**; *М. Чернин* (Курск) **09**; *В. Чубур* (Киев) **18**; *А. Чуприна* (Прилуки) **07**; *А. Шаповал* (Киев) **08, 18**; *А. Шиндлер* (Феодосия) **18**; *В. Штотланд* (Курск) **09, 19**; *С. Шук* (Ржев) **18**; *А. Эгамов* (Гороховец) **07, 08, 18, 19**; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура Свердловской обл.) **07, 09**; *М. Ягмуров* (Алма-Ата) **18**.

Физика

Р. Абубакиров (Ижевск) **18**; *А. Бабкин* (Киев) **21, 24, 26, 27**; *А. Башкатов* (Новополоцк) **21, 27, 29**; *И. Башук* (Великие Мосты) **29**; *В. Белоног* (Старый Оскол) **24, 27, 29**; *О. Белый* (Баку) **18, 29**; *Д. Бережной* (Запорожье) **21, 27, 29**; *В. Берестецкий* (Винница) **21, 24, 27, 29**; *И. Берестов* (Новосибирск) **24**; *В. Бескровный* (Донецк) **19, 21, 22, 26, 27**; *А. Бесперстов* (Алма-Ата) **21**; *А. Беспятный* (Киев) **18**; *И. Блайвас* (Ростов-на-Дону) **18, 26, 27**; *В. Бобров* (Железногорск) **21**; *С. Бобровник* (Черновцы) **19, 21, 24, 27, 29**; *П. Болотских* (Губкин) **27, 29**; *С. Бурдин* (с. Улыбино Новосибирской обл.) **18**; *С. Бычихин* (Евпатория) **27**; *Э. Бязрова* (Тбилиси) **21, 22, 24, 29**; *С. Валюх* (Киев) **21, 27**; *М. Ванюшов* (Ленинград) **24, 29**; *А. Винницкий* (Калуга) **24**; *В. Высоцкий* (Киев) **21, 22, 28—30**; *Е. Габрилович* (Минск) **19, 24**; *В. Гавенский* (Баку) **19, 29**; *Е. Гаркушев* (Гуково) **27**; *С. Герасимов* (Харьков) **21**; *И. Гляненко* (Грозный) **21, 29**; *В. Головко* (Старый Оскол) **24, 27**; *И. Горбунов* (Саратов) **27**; *Ю. Гринфельд* (Москва) **24, 30**; *В. Гула* (Киев) **26, 27**; *В. Гундарь* (Свердловск) **21, 22, 24, 27, 29, 30**; *О. Гусар* (Канев) **21, 22, 27**; *Д. Далидович* (Москва) **21, 29**; *П. Девянин* (Москва) **18, 21, 24, 29**; *А. Дежурных* (Красноярск) **21**; *Б. Дейч* (Харьков) **21, 22, 24, 27, 29**; *С. Демба* (Старый Оскол) **24, 27**; *Н. Демчук* (Здолбунов) **21, 29**; *К. Демьяненко* (Киев) **26, 27**; *А. Денисов* (Ижевск) **22, 27**; *С. Дороненко* (Минск) **21**; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) **18, 21, 24, 27**; *Ю. Дубина* (Каменец-Подольский) **18, 21, 24, 29, 30**; *М. Дугаев* (Черновцы) **29**; *А. Дунаевский* (Москва) **21, 24**; *В. Дядечко* (Винница) **19, 21, 22, 24, 26, 27, 29, 30**; *Д. Егоров* (с. Павлово Горьковской обл.) **21, 22, 24, 27**; *В. Жалнин* (Куйбышев) **21**; *А. Жук* (Ровно) **18, 22, 24, 27**; *В. Журавлев* (Донецк) **21, 24, 29**; *В. Завадский* (Минск) **19, 21, 27, 30**; *А. Залеский* (Харьков) **21, 22, 24, 26**; *Л. Заломихина* (Старый Оскол) **21**; *Ф. Занин* (Старый Оскол) **21, 24, 27, 29**; *Д. и С. Зеленские* (Семипалатинск) **21, 24, 27**; *В. Злобов* (Старый Оскол) **24**; *Д. Золотарев* (Харьков) **24, 27**; *К. Зуев* (Вологда) **21, 26, 27, 29**; *М. Игнатьев* (Славянск) **21, 24, 26**; *И. Иоппе* (Москва) **24, 30**; *С. Казенас* (Алма-Ата) **21, 24, 27, 29**; *В. Камчатный* (Киев) **24, 27**; *М. Капустин* (Львов) **22, 24, 26, 27**; *С. Карапетян* (Баку) **24**; *С. Касаманян* (с. Аракс АрмССР) **21**; *А. Кауфман* (Киреевск) **21**; *Д. Кириллов* (Калининград) **19, 21**; *Т. Кислощаева* (Канев) **21, 22**; *М. Ковалев* (Губкин) **27, 29**; *Г. Коваль* (Москва) **19, 24, 28—30**; *О. Коврижкин* (Москва) **21, 24, 27**; *А. Кожевников* (Калуга) **18, 19, 21, 24, 26, 27, 29**; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) **21, 22, 27**; *Д. Комисаренко* (Винница) **19, 24, 29**; *А. Комник* (Старый Оскол) **21, 24, 26, 27, 29, 30**; *В. Кондратьев* (Калининград) **21**; *О. Кондратьев* (Брест) **21, 27—29**; *И. Коновалов* (Киев) **24**; *С. Кореннов* (Васильков) **24**; *А. Коршков* (Мозырь) **21, 22, 24, 26, 27, 29**; *А. Крайский* (Москва) **18, 21, 27—29**; *А. Крылов* (Тольятти) **21**; *Н. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) **19, 27, 30**; *Н. Куклачев* (Москва) **18**; *Д. Лабутин* (Иваново) **19, 24, 26—30**; *С. Лапин* (Саратов) **18, 22**; *Р. Латыш* (Ноябрьск) **27**; *С. Лукьянчиков* (Москва) **18**; *Н. Лысянский* (Новосибирск) **21, 22, 24, 26, 27, 29**; *Р. Малков* (Саратов) **18, 19, 21, 22, 26—29**; *И. Мартин* (Таллинн) **18, 19, 21, 24, 26, 27**; *В. Марченко* (Минск) **24, 29**; *Д. Мацукевич* (Минск) **19, 21, 28, 29**; *А. Мельников* (Москва) **21, 24, 28, 29**; *В. Меркер* (Старый Оскол) **27**; *Ю. Мечковский* (Минск) **21**; *Р. Мизюк* (Ровно) **18, 19, 21, 22, 24, 27**; *В. Мильнер* (Харьков) **24, 27**; *А. Мина* (Киев) **21**; *А. Михайлов* (Москва) **21, 22, 24, 27, 29, 30**; *С. Михайлов* (Винница) **29**; *М. Михалаускас* (Мажейкяй) **24**; *П. Михеев* (Москва) **21, 24, 27, 29**; *П. Молодов* (Ломоносов) **19, 27, 28**; *А. Мороз* (Харьков) **29**; *А. Настаченко* (Ростов-на-Дону) **21, 24, 27, 29**; *Е. Недув* (Одесса) **19, 21, 22, 24, 27, 29**; *А. Николенко* (Ворошиловград) **26**; *К. Овчаренко* (Днепродзержинск) **21**; *Р. Омаров* (Алма-Ата) **24**; *А. Павлощук* (Киев) **21, 29**; *А. Падий* (Киев) **24, 27, 29**; *С. Палкин* (п. Каменка Архангель-

(Окончание см. на с. 66)



Р — значит ракета

Раз челнок, два челнок...

В. Б. НИКОЛАЕВ

И пламень ярче, вера проще,
Как прост обманчивый челнок.
В. Ропшин, 1911 г.

С давних пор любому солидному предприятию положено зиждиться на трех китах. Освоение человеком околоземного пространства в этом смысле не является исключением. «Киты» космонавтики — это ракетно-космические системы, обеспечивающие выведение полезной нагрузки на орбиту, средства ее возвращения на Землю и орбитальные средства.

В первые годы космической эры СССР и США придерживались близких концепций в построении своих космических программ, в том числе пилотируемых, однако с годами отличия стали проявляться все чаще.

В 1961 г. в СССР был запущен первый в мире космический корабль (КК) «Восток». Аналогичный (по задачам) корабль — «Меркурий» — был создан в том же году и в США. За ними последовали «Восход» и «Джемини». Корабли следующего поколения — «Союз» и «Аполлон», хотя и появились примерно в одно и то же время (1967—1968 гг.), отличались уже не только конструктивно, но и по своему предназначению. КК «Союз» был задуман как транспортное средство для работы, в основном, с орбитальными станциями и (с учетом усовершенствования) находится в эксплуатации и поныне. Число запусков достигло шести десятков! На его базе сделан и грузовой корабль «Прогресс» (еще сорок запусков). КК «Аполлон» был построен в рамках американской экспедиции на Луну и после блестящего ее завершения (в 1972 г.) несколько раз использовался для полетов к американской станции «Скайлэб» и по программе советско-американского проекта «Союз» — «Апол-

лон». В 1975 г. состоялся его последний запуск.

Первая советская долговременная орбитальная станция — «Салют» — была запущена в 1971 г. Вслед за ней на орбиту выводились еще несколько станций. США ограничились одной космической станцией («Скайлэб»), изготовленной на базе верхней ступени ракеты-носителя (РН) «Сатурн-5» (1973 г.).

В шестидесятые годы в СССР и США был создан ряд РН разного класса. Среди них советские РН «Космос», «Союз» и «Протон». Последняя ракета способна выводить на орбиту груз до 20 т. Самой мощной ракетой-носителем США была созданная специально для лунной программы РН «Сатурн-5» (выводила на низкую околоземную орбиту более 130 т). Следующие за ней ракеты (семейства «Титан») выводили груз, по массе на порядок уступающий грузу «Сатурна-5».

Что касается возвращения грузов и пилотов с орбиты, то практически единственными средствами были сами пилотируемые корабли, а вернее, их спускаемые аппараты.

В начале семидесятых годов в связи с окончанием программы исследования Луны США прекращают производство РН «Сатурн-5» и КК «Аполлон» и приступают к разработке многоразовой транспортной космической системы (МТКС) «Спейс шаттл»*). По первоначальному замыслу входящая в ее состав орбитальная ступень должна была доставлять грузы и людей на новую орбитальную станцию. Позднее по финансовым соображениям от производства станции отказались, и «Шаттл» стал «един в двух лицах».

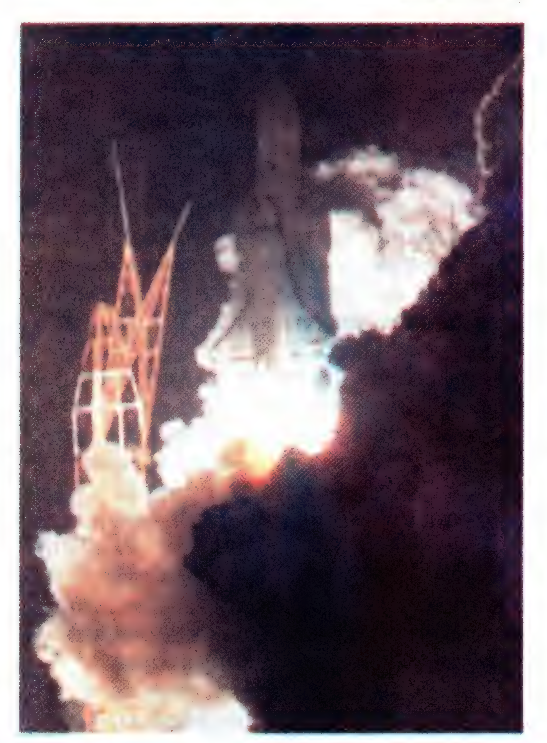
Советский Союз основное внимание уделил созданию орбитальных станций. В полете уже были опробованы станции первого поколения. Шла разработка следующих (с двумя стыковочными узлами, с увеличенной энергетикой, с возможностью дозаправки). Это был шаг к созданию постоянно-действующих станций. Доставка экипажей и грузов производилась достаточно надежными, к тому же серийными, а следовательно — относительно дешевыми средствами, поэтому в создании МТКС, аналогичной американской, не было необходимости. Тем более, что стоимость пуска «Спейс шаттла» оказалась более чем на порядок выше предварительных расчетов. Нужен был качественный шаг, который бы решал задачи не только следующего десятилетия, но и на много лет вперед.

В какой-то степени таким шагом стало создание комплекса «Энергия» — «Буран». По своим характеристикам «Буран» во многом напоминает американский челнок. И дело здесь не только в аэродинамике, законы которой везде одинаковы. Разумны были многие решения, принятые американскими специалистами, и вполне естественно, что к похожим решениям пришли и наши конструкторы.

Однако есть и существенные отличия. Особенно это относится ко всему комплексу «Энергия» — «Буран». Основным здесь является наличие в нем РН, способной функционировать независимо от «Бурана». «Энергия»,



*) «Космический челнок».



имеющая грузоподъемность более 100 т, является базовой ракетой системы двухступенчатых РН пакетной схемы. Они состоят из разного количества модульных унифицированных блоков. Причем боковые блоки могут быть использованы самостоятельно для выведения на орбиту грузов до 12 т, а вообще ракеты-носители этой системы могут выводить грузы в сотни тонн. «Создание этой системы ракет-носителей,— считал академик В. П. Глушко,— послужит надежным фундаментом в развитии советской космонавтики на десятилетия.»

При разработке многоразового космического корабля «Спейс шаттл» полагали, что он должен стать единственным средством выведения полезных грузов на орбиту, и прекратили производство одноразовых ракет-носителей. Это было ошибкой. И не только потому, что по своим характеристикам многоразовые корабли еще не способны их вытеснить. Ошибка стала очевидной, когда в результате гибели «Чэлленджера» в течение двух с половиной лет США оставались без средств доставки грузов на орбиту. Надо отдать должное руководителям советской программы — они не только не допустили подобной ошибки, но и создали еще ряд РН разной размерности.

15 ноября 1988 г. стало днем большого успеха многоразового космического корабля «Буран». Однако путь к успеху был очень непростым. Ведь для того чтобы убедиться в правильности заложенных параметров или определить еще неизвестные, необходимо создать условия, имитирующие реальные.

Например, можно ли спрогнозировать все тепловые потоки — от аппаратуры (а мощность потребляемой электроэнергии на «Буране» может достигать 40 кВт, т. е. в несколько раз больше, чем на «Мире»), от солнечного нагрева, от аэродинамического?.. Как распределить равномерно нагрузки? Каким образом увести тепло? А выдержит ли конструкция «Бурана» перегрузки при полете в атмосфере? Чтобы проверить «Буран» на прочность, один из его макетов окутывают паутиной из сотен тросов, способных передать нагрузки от десятков до сотен тонн. Чтобы совсем было похоже на реальный полет, его еще и нагревают до тысячи градусов. А вот стенд, на котором отрабатывается управление «Бураном» на участке посадки. ПРСО — полноразмерный стенд оборудования — дублирует внешние нагрузки, внутренние системы и оборудование «Бурана». Рядом с ним — стенд-тренажер. 1400 предварительных «полетов» осуществили летчики и испытатели, отработали ручные и автоматические режимы полета с высоты 100 км до 0. Столько ситуаций, сколько проигрывалось здесь, надо надеяться, летчикам не придется видеть в реальном полете.

Стенды стендами, но реальный полет все же лучше — хотя бы на высоту в несколько километров. Начинать пришлось с самолетов-лабораторий ТУ-134 и ТУ-154, с пикирующего МИГа. Затем настала очередь дублера «Бурана». Американцы «сбрасывали» свой «Шаттл» с «Боинга-747», наши специалисты поставили на «Бу-

ран» четыре самолетных двигателя и поднимали его как обычный самолет. Первыми полетели Игорь Волк и Римантас Станкявичус — главные претенденты в первый космический экипаж «Бурана». Через год они уже полностью «доверились автоматике», и она не подвела — посадила самолет с высоты 4 км.

Прошло еще два года, прежде чем «Буран» «получил сертификат» на орбитальный полет. К этому времени ему подготовили посадочную полосу длиной около 5 км и шириной 80 м. Оснастили аэродром всеми необходимыми радиосредствами, обеспечивающими всепогодную посадку, включая автоматическую.

Итак, 15 ноября 1988 г. универсальная ракета-носитель «Энергия», к которой был пристыкован орбитальный корабль «Буран», оторвалась от стартового стола. Отработали положенное время «боковушки», вторая ступень... Наступил момент отделения «Бурана». Есть! Двигатели орбитального корабля включены. (Особенностью схемы выведения «Бурана» является то, что РН в конце активного участка создает условия для того, чтобы средствами самого «Бурана» довывести его на орбиту. Весь участок выведения ракетой-носителем — около 8 мин.) Теперь двукратным запуском двигательной установки корабль выводится на опорную орбиту. Половина задачи — выведение на орбиту — выполнена. Телеметрия уже рассказывает о том, как ведет себя планер в непривычной среде, где нет ни воздушных потоков, ни веса. Один виток, второй... Запускается программа посадки — самой ответственной части испытания. Корабль разворачивается двигателями вперед для создания тормозного импульса, а перед входом в атмосферу вновь принимает привычное положение. Пропал сигнал с корабля — «Буран» летит в плазме. На высоте примерно 40 км в 400 километрах от посадочной полосы начинается взаимодействие бортовых систем с аэродромными средствами...

Буран приближается к месту посадки. Радиомаяки-ретрансляторы по-









зволяют бортовому комплексу определять местонахождение корабля. На последнем, предпосадочном участке микроволновая радиотехническая всепогодная система автоматической посадки формирует «радиотропу», которая точно соответствует заданной линии снижения. В свою очередь, бортовая аппаратура системы посадки после приема и обработки сигналов выдает точную информацию о координатах корабля. На основании этой информации бортовой вычислительный комплекс вырабатывает команды управления «Бураном».

Итак, завершился первый космический полет «Бурана». Стартовав с космодрома Байконур в 6 часов утра по московскому времени, он вернулся туда же через 205 минут.

Что же дало или, вернее, что же нам даст создание советского многоразового корабля? (Сегодня уже накоплен опыт эксплуатации американского «Шаттла» — на 1 января 1989 г., почти за 8 лет с начала его эксплуатации состоялось лишь 26 успешных полетов четырех его образцов, т. е. в среднем по одному полету каждого корабля в год: это намного меньше, чем планировалось. Для выведения обычных грузов на орбиту эта система оказалась не такой уж и эффективной. Для длительной же работы на орбите корабль просто не приспособлен, да и бессмысленно превращать его в станцию — слишком дорогое было бы удовольствие.) Возможность доставлять с орбиты вышедшие из строя спутники?

Говорят, самое интересное мнение — мнение человека заинтересованного. Поэтому послушаем конструктора «Бурана» — Ю. П. Семенова.

— Возврат на Землю спутников, отработавших свой ресурс, для повторного запуска или просто их доставка с орбиты в связи с непредвиденными отказами — это только лишь одна из задач, которая может быть решена кораблем «Буран». Здесь особого «навара» трудно ожидать, если учесть... что с течением времени происходит моральное старение спутников... Но в отдельных случаях может оказаться крайне важен возврат на Землю уникального и очень дорогого исследовательского комплекса... Но все же задачу возврата мы рассматриваем как попутно решаемую, а основная — запуск дорогостоящих объектов, оснащенных уникальными научными инструментами — например крупным оптическим телескопом со сложным электронным оборудованием.*)

Другое направление, считает Ю. П. Семенов,— это реализация дорогостоящих проектов, связанных с применением манипуляторов и роботов. В остальных же случаях одноразовые средства выведения обходятся пока все же дешевле. Поэтому отечественную космическую программу предполагается строить на разумном сочетании средств. Примером может служить обсуждаемый в настоящее время проект корабля (массой более 450 т) для марсианской экспедиции. Межпланетный корабль предполагается собирать на орбите ИСЗ из блоков, выводимых «Энергией», с участием «Бурана».

Есть и другие идеи использования как «Бурана», так и «Энергии», и все же полагаю, что и здесь, как бывало часто (а началось еще при С. П. Королеве), предложение опережает спрос. Придет время, и появятся заказчики и внутри страны, и за рубежом. Таким образом, с введением в эксплуатацию комплекса «Энергия»—«Буран» советская космонавтика будет иметь достаточно крепких китов: РН — с грузоподъемностью от нескольких до ста тонн (с перспективами увеличения до нескольких сотен тонн); корабль «Буран», способный вывести на орбиту около 30 т и примерно половину этой массы возвратить; постояннодействующий орбитальный комплекс на базе станции «Мир» и модулей типа «Квант».

Такого набора средств нет больше ни у кого. И здесь очень важно не упустить возможности, которые дают наши достижения на многих направлениях космонавтики...

*) Известия, 1988, 5 декабря.

Пройдет 7—10 лет, и отправятся в космос новые челноки — западноевропейский «Гермес», английский «Хотол»; позднее, возможно, появится японский вариант, западно-германский... Уже сейчас идут интенсивные работы над многоразовыми кораблями следующего поколения, ведутся они и у нас. Проглядываются и принципиально новые аппараты. Какими они будут? Сколько будут стоить? Не знаю. Но точно можно сказать, что каждая новая разработка не только сосредотачивает в себе достижения многих направлений науки и техники, отраслей промышленности, но и стимулирует их. Это относится и к комплексу «Энергия» — «Буран».

Комментарий

Каковы особенности новой космической системы «Энергия» — «Буран»? Как проходил ее первый полет? На эти вопросы редакция попросила ответить начальника лаборатории НПО «Энергия» С. К. Громова и первого заместителя руководителя полета корабля «Буран» В. И. Староверова.

«Буран» — транспортный космический корабль, и потому основные проблемы, с которыми столкнулись разработчики при его проектировании, являются общими для проектов космических аппаратов, созданных для транспортных операций в ближнем околоземном пространстве. Достаточно привести лишь несколько таких общих проблем, чтобы дать представление о масштабах исследований, предшествовавших появлению «Бурана».

Чтобы решить задачи о динамике полета, траекториях движения, надо знать аэродинамические характеристики машины. Исследования по аэродинамике необходимо было провести во всем многообразии условий атмосферы: от сплошной среды в приземных областях до свободно-молекулярного обтекания в космосе. Параметры излучающего тепло газа связаны с характеристиками теплозащиты, которая во всех возможных условиях — от космического холода до плазменного нагрева — должна сохранять свои свойства. Стало быть, исследования по теплопередаче связаны с проблемами прочности, материаловедением. Однако прочность и материалы влияют на массу конструкции аппарата, а она, в свою очередь, — на общую массу и динамику полета.

Круг, как видно, замкнулся. И ведь это только один, наиболее заметный на поверхности, круг проблем проектирования такого транспортного космического аппарата.

Несомненно, главная особенность этих проблем в приложении к «Бурану» — его многоразовость. Она находит отражение в любой из названных областей исследований. Теплозащита должна быть неразрушаемой, траектория спуска — пологой, прочность — с запасом надежности на многократное использование. Все те же общие проблемы приобретают для многоразового орбитального корабля особенную окраску. Многократно ужесточаются требования надежности и безопасности.

Другая особенность разработки — заложенный в основу построения системы управления принцип единого применения цифровой вычислительной техники. Это отразилось на построении всех систем, причем все разработчики, а вслед за ними и все испытатели обязаны были научиться компьютерному языку и логике мышления вычислительного комплекса.

Наконец, еще одна особенность проекта: корабль создавался параллельно разработке ракеты-носителя. Такая практика связана с серьезным техническим риском, а в приложении к проектам столь масштабным — с опасениями огромных экономических и даже политических потерь. В случае «Энергии» и «Бурана» разработка с самого начала велась параллельно, хотя заложенная в проекте схема позволяла испытывать ракету независимо, что и было с успехом продемонстрировано 15 мая 1987 года. Более того, первая ступень «Энергии» многократно испытана в составе другой двухступенчатой ракеты, а корабль типа «Буран» (с воздушно-реактивными двигателями) совершал самостоятельные полеты.

Немаловажно и то, что первые испытания новой ракетно-космической транспортной системы войдут в историю государства в общем ряду революционных преобразований, демократизации, гласности. Излишняя завеса секретности над советской космонавтикой приподнимается, и на монтажно-испытательном комплексе «Бурана» уже вскоре после первого испытательного полета побывали даже представители иностранной прессы. Это несомненно служит делу мира, развитию международного сотрудничества в науке, технике и культуре.

С. К. Громов

После выведения ракетой-носителем «Энергия» корабля «Буран» на промежуточную орбиту с апогеем примерно 150 км, в 6 ч 08 мин корабль

отделился от ракеты и далее «самостоятельно» перешел на круговую орбиту с высотой примерно 250 км. Орбитальный полет осуществлялся в орбитальной ориентации левой консолью крыла к Земле.

Полет корабля «Буран» выполнялся практически автономно в соответствии с полетным заданием, введенным в систему управления до старта. Заданием предусматривались последовательность включения и выключения бортовых систем для выполнения полетных операций, продолжительность их работы, а также управление бортовыми радиотехническими средствами для передачи в наземный комплекс управления телеметрической, телевизионной и траекторной информации.

В процессе полета между кораблем «Буран» и Центром управления полетом осуществлялся обмен командно-программной информацией, задачей которого была, прежде всего, корректировка данных системы управления корабля о погоде на аэродроме для выбора направления захода на посадку. Был предусмотрен ряд вариантов программы полета при возникновении нештатных ситуаций. Так, при отказах в ракете-носителе предусматривалось возвращение «Бурана» с траектории выведения на посадочный аэродром, а при отказах в системах корабля на орбите — продление полета с последующим возвращением корабля на Землю.

В 8 ч 20 мин система управления включила двигатель для отработки тормозного импульса, после чего корабль осуществил сход с орбиты. В 8 ч 53 мин с кораблем «Буран» прервалась связь из-за образования атмосферной плазмы вокруг него. Связь восстановилась через 18 мин на высоте примерно 50 км.

На высоте 40 км система управления «Бурана» вошла в контакт с радиосредствами посадочного аэродрома, по информации которых в дальнейшем корректировала движение корабля. На высоте примерно в 17 км корабль прошел над аэродромом, на удалении от него примерно в 20 км развернулся на 180°. На высоте 4 км «Буран» вышел на глиссаду и в 9 ч 24 мин коснулся полосы. Так впервые в мире была совершена автоматическая безмоторная посадка беспилотного аппарата. Вертикальная скорость в момент касания 0,6 м/с, боковое отклонение от оси полосы менее 3 м. Удивительная точность и мягкость посадки даже для пилотируемого моторного аппарата!

В. И. Староверов

«Союз» объявляет конкурс

Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз» и Институт медико-биологических проблем Министерства здравоохранения СССР проводят конкурс на лучший биологический эксперимент в космосе.

В 1987 году в Советском Союзе был запущен необычный спутник «Космос-1877»: целый «зоопарк» был выведен на околоземную орбиту. На борту биоспутника проводились научные эксперименты с целью понять, как влияет невесомость на жизнедеятельность земных организмов. Самым необычным было то, что два эксперимента придумали, подготовили и «провели» школьники (учащиеся 8—9 классов). Они побывали на космодроме, участвовали в снаряжении спутника, доложили о результатах на совете ученых и даже на международном симпозиуме.

В июле — августе этого года предполагается запуск очередного советского биоспутника. На его борту будет место и для эксперимента, который подготовят школьники. В прошлый раз выяснилось, что предложений очень много, но «полетит», разумеется, только один, лучший эксперимент. *Он должен быть интересным (оригинальным, осмысленным), реальным (выполнимым) и подготовленным самостоятельно.*

Если вы решили участвовать в конкурсе, то:

дайте четкий ответ на вопрос, как влияет невесомость на выбранный вами процесс, на показатель жизнедеятельности;

докажите, что выбранный организм наверняка выживет в тесноте и благополучно вернется на Землю (длительность полета 17 суток, максимальный объем, отводимый для эксперимента, 3—4 спичечных коробка, света нет, температура комнатная, атмосфера в спутнике нормальная, земная, упаковка должна исключать возможность утечки воды и выползание живности в кабину спутника, следует позаботиться также о корме для ваших избранников).

Последний этап подготовки эксперимента и обработку его результатов после посадки биоспутника надо будет провести в Институте медико-биологических проблем (расходы на проезд, проживание в гостинице и поездку на космодром организаторы конкурса берут на себя).

Ваши предложения присылайте по адресу: 123007 Москва, Хорошевское шоссе, 76а, ИМБП Минздрава СССР, Алпатову Алексею Михайловичу.

Желаем вам успехов!

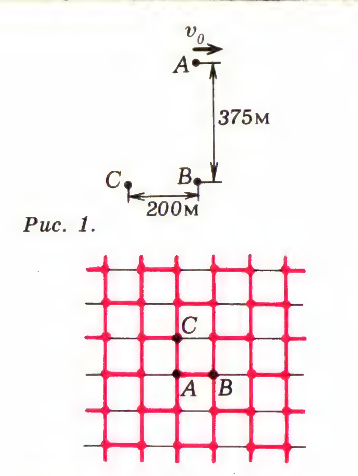


Рис. 1.

Рис. 2.

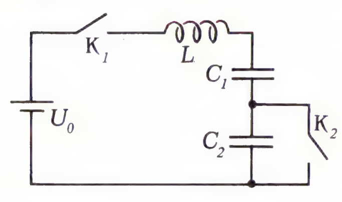


Рис. 3.

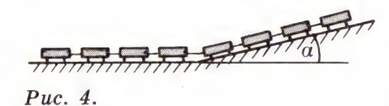


Рис. 4.

Задачник „Кванта"

Ф1164. В строительстве используются так называемые предварительно напряженные железобетонные конструкции. Изготовление такой балки происходит следующим образом. Стальной стержень длиной l_1 растягивают до длины l_2, после чего заливают жидким бетоном. После затвердевания бетона стержень освобождают от растягивающего усилия. Найти длину образовавшейся железобетонной балки и ее модуль Юнга. Площади сечения стержня и балки и модули Юнга стали и бетона считать известными. Чем предварительно напряженный железобетон лучше простого железобетона?

Б. И. Клячин

Ф1165. Из бесконечной квадратной проводящей сетки с сопротивлением каждого ребра r удалили часть проводников — так, как показано на рисунке 2. Найти сопротивление между точками A и B, B и C, A и C.

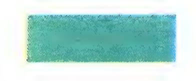
С. С. Кротов

Ф1166. В схеме, приведенной на рисунке 3, замыкают ключ $К_1$ (при замкнутом ключе $К_2$), а в тот момент, когда заряд на конденсаторе C_1 становится максимальным, ключ $К_2$ размыкают. Найти максимальный заряд конденсатора C_2. Параметры элементов схемы, указанные на рисунке, считать заданными.

В. В. Можаев

Ф1167. Длинный железнодорожный состав, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом α. Когда состав полностью остановился, на горке находилась половина его длины (рис. 4). Сколько времени прошло от начала подъема до остановки? Длина состава L, трением пренебречь.

А. И. Буздин



Решения задач

М1131 — М1135, Ф1143 — Ф1147

М1131. *Пусть n — натуральное число и $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ подмножества некоторого множества B. Предположим, что*

а) каждое множество A_i ($i=1, 2, \ldots, 2n+1$) содержит ровно $2n$ элементов;
б) каждое множество $A_i \cap A_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1$) содержит ровно один элемент;
в) любой элемент множества B принадлежит не менее чем двум из множеств A_i ($i=1, 2, \ldots, 2n+1$).

Ответ: для четных n.

Покажем, что каждый элемент множества B принадлежит ровно двум из множеств A_i. Наличие хотя бы двух таких множеств обеспечено условием в). Допустим, что *некоторый элемент принадлежит трем множествам*, скажем, A_{2n+1}, A_i, A_j. Сопоставим ему множество A_i, а каждому из остальных элементов $x \in A_{2n+1}$ — одно из содержащих элемент x по условию в) множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Тогда разным элементам будут сопоставлены разные множества, причем множество A_j не отвечает ни одному элементу (иначе какое-то пересечение $A_k \cap A_{2n+1}$, $k \neq 2n+1$, содержит два элемента, что противоречит условию б)). Поэтому число элементов в A_{2n+1} не превосходит $2n-1$. А это противоречит условию а) и, тем самым, опровергает наше допущение.

Для каких значений n можно поставить в соответствие каждому элементу множества B одно из чисел — 0 или 1 — так, чтобы каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ содержало ровно n элементов, соответствующих числу 0?

Если задано распределение нулей и единиц по элементам множества B такое, что в каждом множестве A_i имеется ровно n «0-элементов», то общее число «0-элементов» равно $n(2n+1)/2$ (каждый из них принадлежит двум множествам A_i). А это число целое только при четном n.

Обратно, для каждого элемента x множества B рассмотрим единственную содержащую его пару множеств $\{A_i, A_j\}$ и сопоставим элементу x число 0, если $|i-j| \leqslant n/2$ или $|i-j| > 3n/2$, и 1, если $n/2 < |i-j| \leqslant 3n/2$. При четном n мы получим ровно n «0-элементов» в каждом множестве A_i, что и требуется.

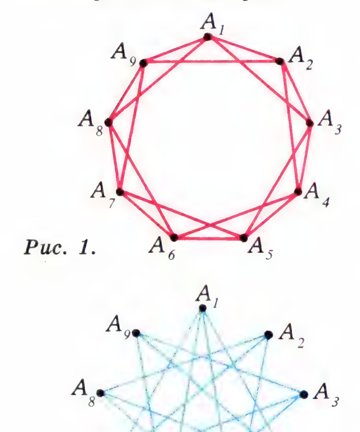


Рис. 1.

Рис. 2.

При решении этой задачи основные усилия уходят на то, чтобы как следует понять условие. Здесь очень помогает графическая интерпретация (см. рисунки 1 и 2 для $n=4$): каждое множество A_i изображается вершиной правильного $(2n+1)$-угольника, а единственный общий элемент множеств A_i и A_j — отрезком, соединяющим соответствующие вершины, причем красные отрезки изображают «0-элементы», а синие «1-элементы»; множество B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех этих отрезков. Полезно проследить за нашими рассуждениями на этом графе.

В. В. Вавилов

М1132. *Функция f определена на множестве целых положительных чисел и удовлетворяет следующим условиям:*
$f(1)=1$, $f(3)=3$, $f(2n)=f(n)$,
$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$,
$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$.
Найдите число всех таких значений n, для которых $f(n)=n$ и $1 \leqslant n \leqslant 1988$.

Ответ: 92.

Докажем индукцией по числу k знаков в двоичной записи $\overline{a_1a_2\ldots a_{k-1}a_k}$ $(a_1=1)$ числа m, что

$$f(m)=\overline{a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1}. \qquad (*)$$

При $k=1$ имеем $f(1)=1$; при $k=2$ имеем

$$f(\overline{10})=f(2)=f(1)=1=\overline{01},$$
$$f(\overline{11})=f(3)=3=\overline{11}.$$

Докажем теперь наше утверждение для k-значного $(k>2)$ в двоичной системе числа m, считая, что оно верно для всех чисел с меньшим числом знаков. Рассмотрим три возможных случая.

1) m четно: $m=2n=\overline{a_1\ldots a_{k-1}0}$. Тогда $n=\overline{a_1\ldots a_{k-1}}$ и

$$f(m)=f(n)=\overline{a_{k-1}\ldots a_1}=\overline{0a_{k-1}\ldots a_1}.$$

2) $m=4n+1=\overline{a_1\ldots a_{k-2}01}$. Тогда $n=\overline{a_1\ldots a_{k-2}}$ $2n+1=\overline{a_1\ldots a_{k-2}1}$ и

$$f(m)=2f(2n+1)-f(n)=f(2n+1)+(f(2n+1)-f(n))=$$
$$=\overline{1a_{k-2}\ldots a_1}+(\overline{1a_{k-2}\ldots a_1}-\overline{a_{k-2}\ldots a_1})=\overline{10a_{k-2}\ldots a_1}.$$

3) $m=4n+3=\overline{a_1\ldots a_{k-2}11}$. Тогда $n=\overline{a_1\ldots a_{k-2}}$ и

$$f(m)=3f(2n+1)-2f(n)=f(2n+1)+2(f(2n+1)-f(n))=$$
$$=\overline{1a_{k-2}\ldots a_1}+2(\overline{1a_{k-2}\ldots a_1}-\overline{a_{k-2}\ldots a_1})=$$
$$=\overline{11a_{k-2}\ldots a_1}.$$

Во всех случаях формула (*) верна; тем самым она доказана для всех m.

Ф1143. *Имеется очень большое количество цилиндрических сосудов с водой, погруженных один в другой так, что каждый следующий плавает в предыдущем. Площадь дна самого маленького сосуда равна s_0 и много меньше площади дна самого большого. В самый маленький сосуд доливают объем воды v_0. На сколько опустится этот сосуд относительно земли? (После доливания воды все сосуды продолжают плавать.)*

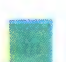
Рассмотрим условие равновесия любого из плавающих сосудов: сила тяжести этого сосуда уравновешивается разностью сил давления воды извне и изнутри. Таким образом, как до, так и после доливания воды в любой из сосудов разность уровней воды вне и внутри каждого сосуда остается одной и той же. А это означает, что относительно земли положение уровней воды во всех сосудах остается неизменным.

Итак, относительно земли уровень воды в самом маленьком сосуде после доливания в него воды не изменяется. Следовательно, дно этого сосуда опустится на величину

$$h=\frac{v_0}{s_0},$$

т. е. на высоту долитого слоя воды.

С. С. Кротов



Ф1144. *На плоскости расположено N одинаковых бильярдных шаров. Один шар толкнули, и, испытав несколько соударений, он остановился в той же точке, из которой начал движение. При каком минимальном N это возможно? Соударения считать абсолютно упругими.*

Прежде всего заметим, что после абсолютно упругого соударения двух одинаковых шаров, один из которых до этого покоился, шары разлетаются под прямым углом. Действительно, по закону сохранения импульса (рис. 1; здесь $\vec{v}_0$ — скорость налетающего шара до удара, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ скорости шаров после удара)

$$m\vec{v}_0=m\vec{v}_1+m\vec{v}_2,$$

а по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2},$$

отсюда следует, что скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ шаров после удара перпендикулярны друг другу: $\vec{v}_1\perp\vec{v}_2$.

Теперь покажем, что, испытав одно соударение, шар отклоняется от направления своего движения на угол $\beta<\pi/2$. Согласно рисунку 2, $\beta=\pi/2-\alpha$, где $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$. Если $\alpha=0$, первый шар после удара останавливается (а второй шар начинает двигаться со скоростью $\vec{v}_2=\vec{v}_0$). Следовательно, $\beta<\pi/2$.

По условию задачи один из шаров (будем называть его первым), испытав несколько соударений, должен описать замкнутую ломаную. Как известно, сумма внешних углов такой ломаной больше или равна 2π (знак равенства соответствует выпуклому многоугольнику).

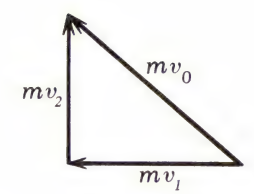


Рис. 1.

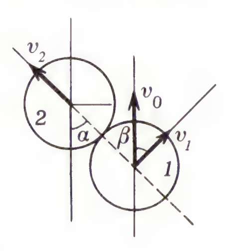


Рис. 2.

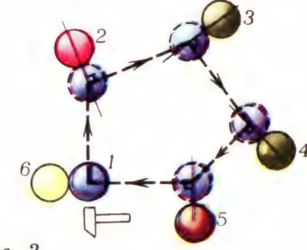


Рис. 3.

Значит, число шаров, с которыми должен столкнуться первый шар, должно удовлетворять неравенству

$$n \geqslant \frac{2\pi}{\pi/2} \geqslant 4.$$

Кроме того, чтобы исходный шар остановился, вблизи начальной точки должен находиться еще один шар, который испытает с первым лобовое соударение и остановит его.

Итак, минимальное количество шаров

$$N_{min}=4+1+1=6.$$

Возможное расположение шаров показано на рисунке 3.

А. А. Белопольский

Ф1145. *Один конец нерастяжимой невесомой нити, продетой через маленькую бусинку массой m, закреплен в точке A, а другой привязан к невесомому кольцу, которое может свободно скользить вдоль горизонтального стержня (рис. 1). В начальный момент бусинку удерживают у кольца, нить прямолинейна и не натянута. Бусинку отпускают. Найти скорость бусинки в момент разрыва нити, если известно, что нить выдерживает максимальное натяжение T_0. Длина нити L, расстояние от точки A до стержня равно h. Трением в системе пренебречь.*

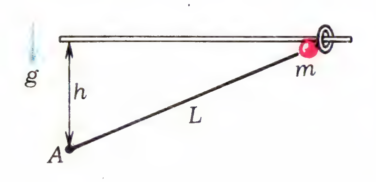


Рис. 1.

Для определения траектории движения бусинки введем систему координат так, как показано на рисунке 2 (ось X направлена вдоль стержня вправо, а ось Y направлена вертикально вниз и проходит через точку закрепления нити A). Пусть бусинка находится в точке N. Так как кольцо невесомо и скользит по стержню свободно, верхний участок нити BN вертикален. Тогда

$$BN=y \text{ и } PN=x.$$

Из треугольника APN имеем

$$AP^2+PN^2=AN^2,$$

или

$$(h-y)^2+x^2=(L-y)^2.$$

Отсюда получаем

$$y=\frac{L+h}{2}-\frac{x^2}{2(L-h)},$$

т. е. бусинка движется по параболе.

В точке N траектории на бусинку со стороны нити действуют силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, причем их сумма $\vec{F}$ направлена перпендикулярно касательной к параболе в данной точке. (Действительно, только одни силы натяжения нити не могут вызвать движения бусинки.) Теперь, так как нить идеальна и трение бусинки о нить отсутствует, $T_1=T_2=T$, и, следовательно, сила $\vec{F}$ направлена по биссектрисе угла между векторами $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$.

Запишем для бусинки второй закон Ньютона в проекциях на направление, перпендикулярное касательной к траектории:

$$ma_n=2T\cos\alpha-mg\cos\alpha. \qquad (1)$$

С другой стороны, нормальное (центростремительное) ускорение равно

$$a_n=v^2/R, \qquad (2)$$

где $v=\sqrt{2gy}$ — скорость бусинки и R — радиус кривиз-

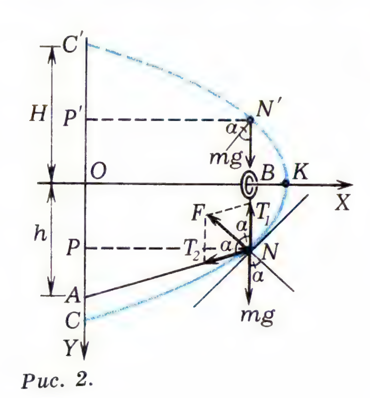


Рис. 2.

ны параболы в точке N. Для решения задачи нам остается найти R.

Сравним движение бусинки с движением тела, брошенного под углом к горизонту. При этом параметры этого движения выберем такими, чтобы траекторией тела была парабола, симметричная траектории бусинки (см. рис. 2). Тогда

$$u_x = \frac{OK}{t} \text{ и } t = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

где $OK = \sqrt{L^2 - h^2}$ и $H = (L+h)/2$.

Нормальное ускорение тела в точке N'

$$a'_n = g \cos\alpha = \frac{u^2}{R}.$$

Учитывая, что $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, где $u_y^2 = 2g(H-y)$, получаем

$$R = \frac{u^2}{a'_n} = \frac{2(L-y)}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

Объединим уравнения (1) — (3) в систему и найдем натяжение нити, по которой скользит бусинка:

$$T = \frac{mgL}{2(L-y)}.$$

Нить разорвется, если $T = T_0$, т. е. когда

$$y = L\left(1 - \frac{mg}{2T_0}\right)$$

и

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gL\left(1 - \frac{mg}{2T_0}\right)}.$$

Заметим, что

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{L+h}{2},$$

т. е.

$$0 \leqslant L\left(1 - \frac{mg}{2T_0}\right) \leqslant \frac{L+h}{2}.$$

Таким образом, если выполняется условие

$$2 \geqslant \frac{mg}{T_0} \geqslant 1 - \frac{h}{L},$$

то в момент разрыва нити скорость бусинки

$$v = \sqrt{2gL\left(1 - \frac{mg}{2T_0}\right)};$$

если $mg/T_0 > 2$, то нить разорвется в начальный момент; если же $mg/T_0 < 1 - h/L$, то в процессе движения бусинки нить не разорвется никогда.

В. Т. Карапетян

Ф1146. *Найдите сопротивление между точками A и B в бесконечной последовательности элементов,*

Приведем два решения этой задачи.

1) Из соображений симметрии очевидно, что в данной схеме (см. рис. 1) есть точки, потенциалы которых одинаковы. Так, например,

изображенной на рисунке 1. Все элементы одинаковы, сопротивление каждого элемента равно r.

Задачник „Кванта"

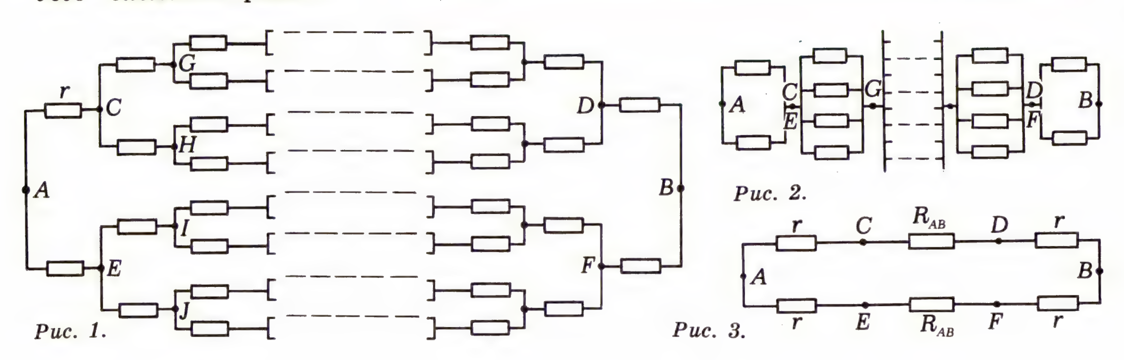


Рис. 1. *Рис. 2.* *Рис. 3.*

$$\varphi_C=\varphi_E, \quad \varphi_G=\varphi_H=\varphi_I=\varphi_J$$

и т. д.

Заменим схему эквивалентной, изображенной на рисунке 2. Сопротивление между точками A и C равно $r/2$, между точками C и G — $r/4$ и т. д. Тогда сопротивление между точками A и B есть

$$R_{AB}=2\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\frac{r}{8}+\ldots\right)=$$

$$=r\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=r\frac{1}{1-1/2}=2r.$$

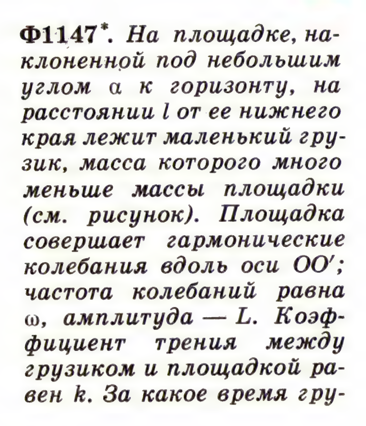
2) Поскольку последовательность элементов бесконечна, можно считать, что сопротивление между точками A и B равно сопротивлению между точками C и D. Тогда эквивалентную схему можно представить в виде, изображенном на рисунке 3, откуда непосредственно получаем

$$R_{AB}=\frac{1}{2}(2r+R_{AB}),$$

или

$$R_{AB}=2r.$$

С. Здравкович (СФРЮ)



Ф1147*. *На площадке, наклоненной под небольшим углом α к горизонту, на расстоянии l от ее нижнего края лежит маленький грузик, масса которого много меньше массы площадки (см. рисунок). Площадка совершает гармонические колебания вдоль оси OO′; частота колебаний равна ω, амплитуда — L. Коэффициент трения между грузиком и площадкой равен k. За какое время гру-*

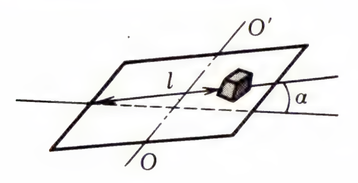
Будем решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с колеблющейся площадкой. Направим ось Y по оси колебаний OO', а ось X — перпендикулярно этой оси. В плоскости площадки на грузик действуют три силы — так называемая скатывающая сила (проекция силы тяжести на ось X) $mg\sin\alpha$, сила трения $kmg\cos\alpha$ и сила инерции $m\omega^2L\cos\omega t$ (если площадка колеблется по закону $y=L\cos\omega t$).

Поскольку колебания площадки весьма быстрые, можно полагать, что сила инерции больше всех остальных сил. Обозначим характерные величины с размерностью ускорения через a, b и c:

$$a=g\sin\alpha,\ b=kg\cos\alpha,\ c=\omega^2L.$$

Тогда $c\gg a$ и $c\gg b$. В таком случае надо думать, что за

зик свалится с площадки? (Считать, что это время много больше периода колебаний площадки.)





период колебаний компонента скорости v_x в направлении скатывания груза не изменяется. Более того, в течение большей части периода горизонтальная компонента скорости $v_y \gg v_x$. Это означает, что сила трения направлена также горизонтально, и движение тела вдоль оси X происходит лишь под действием скатывающей силы:

$$v_x = at \text{ и } t_x = \sqrt{2l/a}.$$

В то же время трение, безусловно, будет вносить малую (в силу малости c^{-1}) поправку. Оценим ее. Малая величина силы трения и соответствующая компонента ускорения вдоль оси X определяются отношением $v_x/\sqrt{v_x^2+v_y^2}$:

$$b_x = b\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = b\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+\omega^2L^2\sin^2\omega t}}.$$

При этом мы считаем, что движение вдоль оси Y чисто гармоническое. На самом деле из-за наличия силы трения это движение будет отличаться от гармонического, но порядок поправки будет такой, что ею можно пренебречь (ниже об этом будет сказано подробнее).

Вычислим среднее значение b_x:

$$\bar{b}_x = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/(2\omega)} bv_x/\sqrt{v_x^2+\omega^2L^2\sin^2\omega t}\,dt.$$

При t, для которого $\omega L\sin\omega t \gg v_x$, величиной v_x можно пренебречь, поэтому

$$\bar{b}_x \approx \frac{2\omega}{\pi}\int_{v_x/(\omega^2L)}^{\pi/(2\omega)} \frac{bv_x}{\omega L\sin\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi\omega}\frac{bv_x}{L}\int_{v_x/(\omega L)}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{2bv_x}{\pi\omega L}\ln\frac{v_x}{2\omega L}.$$

Более точные вычисления показывают, что величина под знаком логарифма должна быть вдвое меньше; однако с той точностью, которую мы выбрали, эта разница не важна. Подставим сюда найденное нами в первом приближении выражение $v_x = at$ и получим

$$\bar{b}_x(t) = -\frac{2bat}{\pi\omega L}\ln\frac{at}{4\omega L}.$$

Отсюда полное ускорение движения

$$x''(t) = a - \bar{b}_x(t) = a + \frac{2bat}{\pi\omega L}\ln\frac{at}{4\omega L}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v_x(t) = x'(t) = at + \frac{8b}{\pi}\left(\frac{at}{4\omega L}\right)^2\left(\frac{\ln\frac{at}{4\omega L}}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

Отбрасывая члены, малые по сравнению с $\ln(at/(\omega L))$, получим

$$x'(t) = at + \frac{4b}{\pi}\left(\frac{at}{4\omega L}\right)^2\ln\frac{at}{\omega L}\cdot\frac{4\omega L}{a},$$

и $$x=\frac{at^2}{2}+\frac{b}{\pi}\left(\frac{at}{\omega L}\right)^3\left(\frac{\omega L}{a}\right)^2\frac{1}{3}\ln\frac{at}{\omega L}$$

(здесь мы сразу отбросили нелогарифмический член).

Наконец, чтобы оценить поправку к t_x, подставим $t_x=\sqrt{2l/a}$, как первое приближение, в последнюю формулу:

$$l=\frac{at_x^2}{2}+\frac{b}{3\pi}\left(\frac{a}{\omega L}\right)\left(\frac{2l}{a}\right)^{3/2}\ln\frac{\sqrt{2la}}{\omega L},$$

откуда искомое время

$$t_x=\sqrt{\frac{2l}{a}}\left(1-\frac{b}{6\pi l}\left(\frac{a}{\omega L}\right)\left(\frac{2l}{a}\right)^{3/2}\ln\frac{\sqrt{2la}}{\omega L}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2l}{\imath}}\left(1-\frac{b}{3\pi a}\frac{\sqrt{2la}}{\omega L}\ln\frac{\sqrt{2la}}{\omega L}\right),$$

где $a=g\sin\alpha$, $b=kg\cos\alpha$.

И. И. Мазин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1106—М1120, Ф1118—Ф1132, справились с задачами М1106, М1111—М1117, М1120, Ф1120, Ф1123, Ф1125, Ф1131, Ф1132. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В. Абраамян (с. Бюракан АрмССР) **07, 18;** *А. Акимов* (Евпатория) **07, 08, 18, 19;** *А. Акопян* (Ереван) **18;** *Н. Андрианов* (Электросталь) **07—09, 18, 19;** *В. Андрюшенко* (Винница) **18;** *И. Аржанцев* (Киев) **07, 08, 18, 19;** *Б. Арясов* (Киев) **18;** *Е. Бакенов* (Караганда) **18;** *В. Барановский* (Омск) **07—09, 18, 19;** *И. Бащук* (Великие Мосты) **07;** *Б. Белоусов* (Евпатория) **18;** *А. Богданов* (Старый Оскол) **19;** *П. Бородин* (Киров) **08, 18;** *И. Бощанский* (Рига) **07;** *И. Брагина* (Челябинск) **18;** *Я. Бренер* (Вильнюс) **07, 18;** *Ю. Великина* (Днепропетровск) **07—10, 18, 19;** *Р. Видунас* (Друскининкай) **18;** *Т. Вовкивский* (Черновцы) **08;** *И. Вознюк* (Красноармейск КазССР) **07;** *К. Волченко* (Донецк) **07;** *М. Выборнов* (Киев) **07—10, 18, 19;** *К. Генов* (София, НРБ) **07;** *А. Герасименко* (п. Темрюк Краснодарского кр.) **19;** *Ю. Гринфельд* (Москва) **07, 08, 18, 19;** *А. Гурман* (Одесса) **07;** *К. Давтян* (Ереван) **07, 18;** *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) **18;** *П. Данчев* (Пловдив, НРБ) **07;** *А. Денисов* (Ижевск) **09;** *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) **07, 08;** *Д. Долгопят* (Реутов) **18, 19;** *Ю. Дорошенко* (Одесса) **07;** *Б. Дубров* (Минск) **07, 08, 18;** *Е. Дуда* (Харьков) **18;** *С. Жарков* (Киев) **18;** *И. Зеленко* (Саратов) **07, 08, 18, 19;** *С. Зелик* (Краматорск) **07—10, 18, 19;** *В. Ивлев* (Джезказган) **18;** *Н. Игнатов* (с. Семеновское Московской обл.) **07, 08;** *М. Игнатьев* (Москва) **18, 19;** *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) **18, 19;** *И. Иоппе* (Москва) **18, 19;** *Д. Кабыш* (Москва) **07;** *В. Калошин* (Харьков) **07—09;** *Л. Каминштейн* (Киев) **07, 08, 18, 19;** *Н. Капуткина* (Москва) **18;** *С. Касаманян* (Ереван) **18;** *И. Квиташвили* (Тбилиси) **18;** *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) **18;** *С. Коваценко* (Винница) **07—09, 19;** *Д. Кожевников* (Онутинск Кировской обл.) **08;** *А. Козачко* (Винница) **07—09, 19;** *Д. Козлов* (Ленинград) **18;** *И. Кокоев* (Тбилиси) **18, 19;** *Г. Колесницкий* (Тбилиси) **08;** *Д. Коновалова* (Владивосток) **09;** *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **18;** *А. Коршков* (Мозырь) **07, 09, 18, 19;** *А. Крапивин* (Харьков) **18;** *Кронин* (Ленинград) **19;** *М. Лаба* (Львов) **18;** *Н. Лапуста* (Тернополь) **08, 09, 18;** *В. Левшин* (Москва) **18;** *С. Лесик* (Донецк) **08;** *Ю. Литвинова* (Киев) **07;** *Е. Ломовцева* (Белорецк) **07—09, 18;** *А. Лосев* (Ленинград) **08;** *И. Марков* (Киев) **07-10;** *В. Марченко* (Минск) **19;** *А. Меликян* (Ереван) **07—09;** *А. Мельников* (Краснодар) **07, 08;** *А. Мельников* (Москва) **18;** *В. Мисакян* (Ереван) **07, 18;** *А. Михайлов* (Москва **07—09;** *С. Михно* (Краснодар) **18;** *А. Морозова* (Одесса) **07;** *Р. Мучник* (Винница) **07—09, 18, 19;** *О. Наумов* (Заволжье) **18;** *Д. Никшич* (Киев) **07—09;** *И. Опульский* (Киев) **18, 19;** *В. Острик* (Жданов) **07;** *Б. Петренко* (Днепропетровск) **18;** *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) **07, 09, 18;** *А. Пилипенко* (Киев) **18;**

(Продолжение см. на с. 43)

Квант

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

4 1989

В номере:

ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЗАКОНА ОМА

Кандидат физико-математических наук
С. С. МУРЗИН,
кандидат физико-математических наук
М. Р. ТРУНИН,
кандидат физико-математических наук
Д. В. ШОВКУН

«Бди!» — чаще пользуйтесь этим советом Козьмы Пруткова, когда речь идет о законах. В частности — о законах физики. Вспомним, например, закон Ома: ток пропорционален напряжению. Оказывается, бывает и не так. И хорошо! Если бы этот закон соблюдался всегда, то мы остались бы без многих электро- и радиотехнических устройств. К счастью, закон Ома, как и большинство законов физики, имеет ограниченную область применимости. Именно за пределами действия этого закона и возникают интересные физические явления, обеспечивающие работу этих устройств. Сами по себе эти явления очень интересны, но сегодня мы обсудим другой вопрос: из-за чего нарушается закон Ома?

Закон Ома

Включим проводник в электрическую цепь и будем измерять силу тока I, текущего по проводнику, при разных значениях приложенного напряжения U. Таким образом мы получим зависимость $I=I(U)$ — вольт-амперную характеристику проводника. Согласно закону Ома, сила тока прямо пропорциональна приложенному напряжению, т. е. вольт-амперная характеристика представляет собой линейную функцию

$$I(U)=U/R,$$

и сопротивление R не зависит от U. Если же это не так (закон Ома не выполняется), то вольт-амперная характеристика нелинейная.

Самым простым примером проводника, в котором нарушается закон Ома, является спираль лампы накаливания. Для лампы мощностью 40 Вт вольт-амперная характеристика приведена на рисунке 1. Линейный участок имеется лишь при $U<5$ В, а при бóльших значениях U ток I растет медленнее, чем в случае линейной зависимости $I(U)$. Нетрудно догадаться, почему так получается. При повышении напряжения спираль разогревается, и ее сопротивление увеличивается. Этот пример иллюстрирует общее правило: закон Ома справедлив лишь при достаточно малых I и U, а при больших токах и напряжениях он нарушается.

Запишем закон Ома в другом виде. Для этого введем величину плотности тока $j=I/S$, где S — площадь сечения проводника. Тогда

$$j=\frac{I}{S}=\frac{U}{RS}=$$
$$=\frac{U}{(\rho L/S)\,S}=\frac{1}{\rho}\,\frac{U}{L}=\sigma E.$$

Здесь ρ — удельное сопротивление проводника, величина $\sigma=1/\rho$ называется удельной проводимостью, L — длина проводника, $E=U/L$ — напряженность электрического поля. Закон Ома предполагает линейную связь между плотностью тока j и напряженностью электрического поля E. Если же проводимость σ по какой-то причине зависит от величины электрического поля, то зависимость j от E становится нелинейной, и закон Ома нарушается.

Чтобы выяснить причины нарушения закона Ома, рассмотрим движение электронов в проводниках в отсутствие и при наличии электрического поля.

Как электроны движутся в проводнике

Многие вещества, проводящие электрический ток, являются кристаллическими. Атомы, из которых они состоят, занимают не случайные положения, а образуют структуру, периодически повторяющуюся в пространстве,— кристаллическую решетку.

В проводниках часть атомов ионизована, а оторвавшиеся от них электроны могут перемещаться по проводнику. Концентрация n таких электронов (их называют электронами проводимости) зависит от типа проводника. В металлах концентрация электронов проводимости от температуры не зависит. В меди $n=8{,}4\cdot10^{28}$ м$^{-3}$. В полупроводниках n зависит от температуры. При $T=300$ К в германии $n=2{,}4\cdot10^{19}$ м$^{-3}$.

Может показаться, что электрон с большим трудом «протискивается» через кристалл, то и дело натыкаясь на атомы. Но это совсем не так. Из квантовой теории следует, что из-за строго периодического расположения атомов электроны будут двигаться сквозь идеальную решетку прямолинейно. Этим электроны проводимости напоминают свободные электроны в вакууме. И так же, как в случае электронов в вакууме, движение электронов в кристалле можно описывать с помощью II закона Ньютона — $F=m^*a$, только масса m^* в этой записи (ее называют эффективной массой) отличается от массы m_e электрона в вакууме. Это отличие отражает взаимодействие электрона проводимости с кристаллической решеткой. Поскольку структуры решеток различны в разных проводниках, то и эффективные массы электрона в них будут отличаться. При этом m^* может быть как больше, так и меньше m_e.

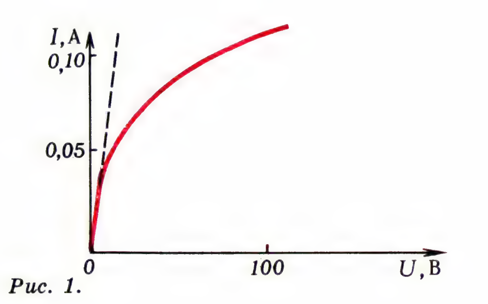


Рис. 1.

Реальные проводники никогда не являются идеальными кристаллами. В них всегда есть нарушения периодического расположения атомов. Например, в некоторые места решетки случайно попадают атомы постороннего вещества — примеси. Налетев на такую примесь, электроны рассеиваются, т. е. изменяют направление своего движения. Тепловые колебания атомов решетки (их отклонения от положений равновесия) нарушают периодичность, и это тоже приводит к рассеянию электронов. Среднее время между столкновениями, в течение которого электрон движется прямолинейно, называется временем свободного пробега τ. Время τ зависит от скорости электрона.

В отсутствие электрического поля электроны проводимости перемещаются в разных направлениях, совершая хаотическое тепловое движение. В полупроводниках движение электронов подобно тепловому движению молекул идеального газа. Средняя скорость v_0 такого движения находится из условия $m^*v_0^2/2=kT_e$, где k — постоянная Больцмана, T_e — температура электронов. При $T_e\approx300$ К в арсениде галлия (GaAs) $v_0\approx4{,}5\times$ $\times10^5$ м/с.

В металлах, где концентрация электронов значительно больше, чем в полупроводниках, нельзя пользоваться выводами молекулярно-кинетической теории газов. Как следует из квантовой теории, средняя скорость хаотического движения электронов в металлах $v_0\approx10^6$ м/с и практически не зависит от температуры.

Теперь посмотрим, к чему приведет включение электрического поля $\vec{E}$. Действующая на электрон сила $-e\vec{E}$ сообщает ему ускорение $\vec{a}=-e\vec{E}/m^*$. Обозначим скорость i-го электрона сразу после рассеяния $\vec{v}_i$. В произвольный момент времени скорость i-го электрона будет равна $\vec{v}_i-e\vec{E}t_i/m^*$, где t_i— время, прошедшее с момента последнего столкновения. Средняя скорость N электронов —

$$\vec{u}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{v}_i-\frac{e\vec{E}}{m^*}t_i\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i-\frac{e\vec{E}}{m^*}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i\right).$$

Величина $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i$ есть средняя скорость электронов сразу после рассеяния. Так как скорости электронов сразу после рассеяния могут быть направлены в любую сторону, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i=0$. Величина $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i=\tau$ имеет смысл уже знакомого нам среднего времени свободного пробега. Итак, под действием электрического поля все электроны приобретают добавочную скорость (ее называют дрейфовой), среднее значение которой равно $u=eE\tau/m^*$, и направлена эта скорость параллельно полю $\vec{E}$.

Таким образом, при наличии электрического поля на хаотическое движение электронов накладывается дрейфовое, появляется преимущественное направление движения электронов — возникает электрический ток. Если концентрация электронов в проводнике равна n, то плотность этого тока —

$$j=enu=\frac{ne^2\tau}{m^*}E.$$

С другой стороны, мы знаем, что $j=\sigma E$. Значит,

$$\sigma=\frac{ne^2\tau}{m^*}.$$

Эта формула называется формулой Друде. Закон Ома справедлив, если ни одна из величин, входящих в формулу Друде, не зависит от E. Если же концентрация электронов n или время свободного пробега τ, или эффективная масса m^* изменяются под действием электрического поля, то закон Ома нарушается.

Когда же справедлив закон Ома

Прежде всего рассмотрим, при каких условиях величина τ не меняется под действием поля E.

Время τ зависит от скоростей электронов. Дрейфовая скорость $u=eE\tau/m^*$, появляющаяся при включении электрического поля, возрастает при увеличении E. Пока электрическое поле мало, так что дрейфовая скорость u гораздо меньше средней скорости хаотического движения v_0, величиной u можно пренебречь и считать время τ не зависящим от поля E. Если же E велико настолько, что значение u сравнимо с v_0, то дрейфовую скорость нужно учитывать. В этом случае скорости электронов и, следовательно, время свободного пробега τ оказываются зависящими от электрического поля.

Таким образом, для выполнения закона Ома необходимо, чтобы выполнялось условие

$$u\ll v_0, \tag{1}$$

т. е. напряженность электрического поля в проводнике должна быть много меньше $E=m^*v_0/e\tau$.

В полупроводниках, как мы уже говорили, $v_0\sim10^5$ м/с. Чтобы достичь значения u, сравнимого с v_0, к полупроводнику необходимо приложить поле $E\sim10^6$ В/м. Это — огромная величина, сравнимая с напряженностью поля в молнии. Тем не менее такое поле удается создать в полупроводниках.

Есть еще одно, более сильное ограничение на скорость u. Она должна быть меньше скорости звука в проводнике (а $v_{зв}\sim10^3$ м/с):

$$u<v_{зв}. \tag{2}$$

Как только скорость u достигает значения $v_{зв}$, в кристалле возбуждаются звуковые колебания. При этом время свободного пробега τ и проводимость σ, пропорциональная τ, могут уменьшиться. Эта ситуация аналогична резкому увеличению аэродинамического сопротивления после преодоления самолетом звукового барьера.

Итак, в поле $E_{зв}\geqslant m^*v_{зв}/e\tau$ проводимость начинает зависеть от величины E, и закон Ома нарушается.

Действие электрического поля не сводится только к появлению дрейфового движения. Известно, что при протекании тока в проводнике выделяется джоулево тепло, и он нагревается. Рассмотрим этот процесс подробнее.

Любой проводник можно считать состоящим из двух подсистем: кристаллической решетки, образованной атомами вещества, и газа электронов проводимости, заполняющего решетку. Электроны и решетку можно характеризовать своими температурами T_e и T_p. В отсутствие электрического поля электронный газ находится в тепловом равновесии с решеткой и окружающей средой: $T_e = T_p = T_c$. Поле E действует на электроны проводимости и разогревает прежде всего их. Лишь затем от электронов тепло передается решетке, а потом окружающей среде. Поэтому при наличии поля тепловое равновесие нарушается так, что $T_e > T_p > T_c$.

Если теплопередача от проводника окружающей среде хуже теплопередачи от электронов атомам и, следовательно, $T_e - T_p \ll T_p - T_c$, то решетка вместе с электронами разогревается как целое. (Такая ситуация характерна для спирали лампы накаливания.) Возможен и обратный случай, когда температура электронов намного выше температуры решетки и $T_e - T_p \gg T_p - T_c$.

В металлах, как мы уже говорили, средняя скорость хаотического теплового движения электронов практически не зависит от температуры. А вот в полупроводниках увеличение T_e под действием электрического поля означает рост скорости v_0 теплового движения электронов, а значит — уменьшение времени свободного пробега. Если изменение Δv_0 скорости v_0 мало, т. е. $\Delta v_0 \ll v_0$, то зависимостью v_0 от E и, значит, τ от E можно пренебречь. Условие $\Delta v_0 \ll v_0$ эквивалентно условию малости перегрева ΔT_e электронов относительно равновесного состояния:

$$\Delta T_e \ll T_e. \qquad (3)$$

Таким образом, условие независимости времени свободного пробега от величины электрического поля, необходимое для выполнения закона Ома, задает следующие ограничения на области применимости этого закона:

$$u \ll v_0, \qquad (1)$$

$$u < v_{зв}, \qquad (2)$$

$$\Delta T_e \ll T_e = T_c. \qquad (3)$$

Нарушение любого из этих неравенств может привести к отклонению от закона Ома. Ниже мы увидим, что при нарушении неравенств $u \ll v_0$ и $\Delta T_e \ll T_e$ электрическое поле E может влиять и на другие величины, входящие в формулу Друде,— эффективную массу m^* и концентрацию электронов n. Зависимости m^* и n от E могут существенно изменить вид вольт-амперных характеристик полупроводников.

Полупроводники в сильном электрическом поле

В образце, по которому течет ток I, выделяется мощность

$$P = I^2 R = \sigma E^2 LS$$

(мы учли, что $I = jS = \sigma ES$, $R = \varrho L/S = L/\sigma S$). В единице объема выделяется мощность $Q = \sigma E^2$. При одном и том же значении Q электрическое поле $E = \sqrt{Q/\sigma}$ в полупроводниках гораздо больше, чем в металлах, так как концентрация электронов в полупроводниках и, значит, проводимость σ намного меньше. Следовательно, в них легче нарушить условия $u < v_{зв}$, $u \ll v_0$. Кроме того, на каждый электрон в полупроводнике приходится бóльшая мощность, чем в металле. Электронный газ разогревается сильнее, поэтому и неравенство $\Delta T_e \ll T_e$ тоже нарушается легче.

Нарушение какого из условий — (1), (2) или (3) — при увеличении электрического поля приведет к наиболее существенному отклонению от закона Ома, зависит от типа полупроводника. Например, в CdS сначала нарушается условие $u < v_{зв}$. При этом в поле $E_{зв} = 1{,}4 \cdot 10^5$ В/м на вольт-ампер-

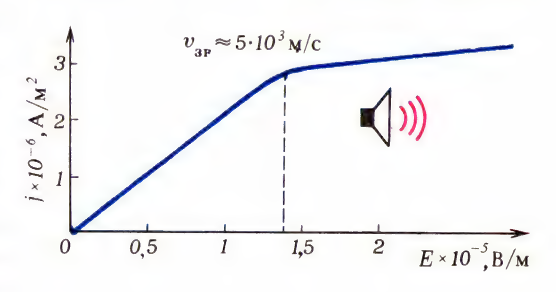


Рис. 2.

ной характеристике $j(E)$ возникает излом (рис. 2). Если $E > E_{зв}$, этот полупроводник интенсивно испускает звук и может быть использован в качестве генератора звуковых колебаний.

В других полупроводниках, таких как Ge, Si, GaAs, InP, CdTe, звук возбуждается гораздо слабее, и в поле $E_{зв}$ заметного излома не наблюдается. В этих полупроводниках отклонения от закона Ома связаны с нарушением условия $\Delta T_e \ll T_e$. При этом время свободного пробега оказывается обратно пропорциональным полю E, т. е. $\tau(E) \sim 1/E$, и зависимость плотности тока от поля связана только с изменением m^* и n. В Ge и Si при $E > 10^6$ В/м на вольт-амперной характеристике (рис. 3) наблюдается насыщение j (m^*, n не зависят от E). В GaAs, InP, CdTe при увеличении энергии электронов с ростом E не только уменьшается время свободного пробега τ, но и растет эффективная масса m^*. Увеличение m^* вызвано изменением взаимодействия электронов с кристаллической решеткой. В результате в этих полупроводниках, начиная с некоторого значения электрического поля E_a, плотность тока j падает с ростом E (участок $E_a < E < E_b$ на рисунке 3). В GaAs падение j начинается с $E_a = 3{,}2 \cdot 10^5$ В/м и продолжается до $E_b \approx 10\ E_a$. В поле E_a дрейфовая скорость электронов $u = j/en = 1{,}5 \times 10^5$ м/с.

В еще более сильном поле $E \sim 10^7$ В/м наряду с нарушением условия $\Delta T_e \ll T_e$ нарушается и условие $u \ll v_0$. В таком поле электроны получают за время свободного пробега энергию, достаточную для ионизации атомов. Быстрые электроны при столкновениях с атомами выбивают дополнительные электроны, которые в свою очередь тоже ускоряются полем и генерируют новые носители заряда. Этот процесс называется ударной ионизацией. Общая концентрация n электронов возрастает, и, следовательно, растет проводимость. При еще большем увеличении электрического поля ($E > 10^7$ В/м) концентрация и проводимость возрастают лавинообразно, наступает пробой полупроводника.

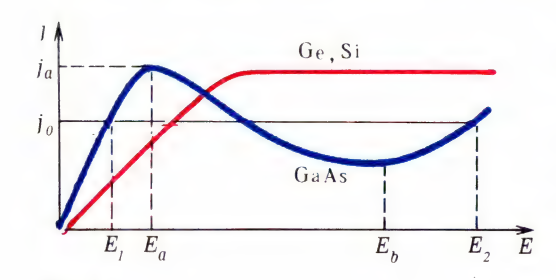


Рис. 3.

Таким образом, в полупроводниках в очень сильных полях E плотность тока $j = \sigma E$ увеличивается быстрее, чем по линейному закону. В частности, в Ge и Si насыщение тока сменяется его нелинейным ростом, а в GaAs, InP, CdTe вольт-амперная характеристика приобретает N-образный вид (рис. 3); при $0 < E < E_a$ выполняется закон Ома, в интервале $E_a < E < E_b$ имеется падающий участок, вызванный уменьшением τ и возрастанием m^* в сильном электрическом поле, и, наконец, в области $E > E_b$ происходит быстрый рост j из-за увеличения n.

Эффект Ганна

Наличие падающего участка на вольт-амперной характеристике приводит к интересному явлению, обнаруженному американским инженером Джоном Ганном.

Приложим к образцу GaAs длиной L напряжение U_0 такое, чтобы оказаться на падающем участке зависимости $j(E)$. Предположим, что сначала электрическое поле в образце однородно и равно U_0/L. Пусть по какой-либо причине в тонком слое AB образца поле E оказалось чуть больше, чем в остальном объеме образца (рис. 4). Тогда скорость дрейфа электронов $u = j/en$ внутри слоя AB окажется меньше, чем снаружи. Поэтому к границе A будет подлетать больше электронов, чем улетать от нее, а у границы B — наоборот. Вблизи A возникнет избыток отрицательного заряда, а вблизи B — положительного. Следовательно, в слое AB появится дополнительное электрическое поле, направленное в ту же сторону, что и исходное. Увеличе-

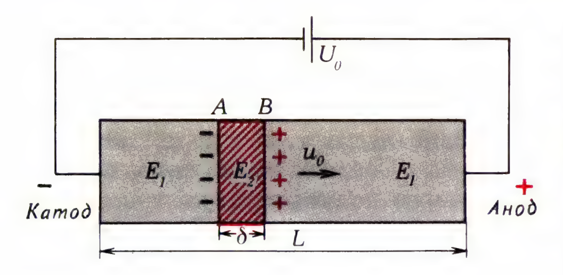


Рис. 4.

ние поля приведет к тому, что дрейфовая скорость электронов внутри слоя еще уменьшится, и поле там еще больше возрастет.

Таким образом, однородное распределение электрического поля на падающем участке $j(E)$ невозможно: любая сколь угодно слабая неоднородность E, случайно возникшая в образце, не рассасывается, а нарастает. В результате образуется узкая область (размером δ) сильного поля, которая называется электрическим доменом. При этом, так как напряжение U_0 на образце задано, т. е.

$$E_2\delta+E_1(L-\delta)=U_0=\text{const},$$

рост поля E_2 в домене сопровождается уменьшением поля E_1 вне его. Наступит момент, когда $E_1<E_a$ и $E_2>E_b$ (см. рис. 3). Скорость дрейфа электронов вне домена начнет уменьшаться, а внутри — увеличиваться. Рост поля E_2 в домене прекратится, когда эти скорости сравняются, и плотности токов в домене и в образце станут одинаковыми:

$$j(E_1)=j(E_2)=j_0.$$

Из двух последних равенств следует, что установившаяся в образце плотность тока j_0 зависит от толщины домена δ.

Обычно домен возникает вблизи катода (за счет вплавления контактов здесь больше неоднородностей) и, увлекаемый потоком электронов, начинает двигаться к аноду со скоростью $u_0=j_0/en$. Пока он движется вдоль образца, его размер не меняется, а значит, не меняется и ток j_0. Вблизи анода домен начинает исчезать, его толщина уменьшается, и ток в образце возрастает. Одновременно увеличивается поле E_1 вне домена. Как только E_1 достигнет значения E_a, у катода зарождается новый домен, ток начинает уменьшаться, и этот процесс периодически повторяется (рис. 5). Период колебаний тока в образце — $T_0=L/u_0$.

Итак, прикладывая к полупроводнику постоянное напряжение U_0, мы получаем переменный ток частоты $f=1/T_0=u_0/L$. Это совсем уж непохоже на закон Ома. В арсениде галлия (GaAs) $u_0\approx10^5$ м/с. Используя небольшие образцы длиной от одного до ста микрон, можно менять частоту переменного тока в диапазоне $f\sim10^9$—10^{11} Гц. На основе эффекта Ганна работает большинство современных генераторов сверхвысоких частот (СВЧ). Эти приборы используются, например, для определения постами ГАИ скорости движения автомобилей и в телевизионном вещании через искусственные спутники Земли.

Нарушение закона Ома при больших токах

До сих пор мы рассматривали движение электронов под действием только электрического поля. Однако известно, что протекающий по проводнику ток является источником магнитного поля. Магнитное поле возникает не только снаружи, но и внутри проводника. Например, вблизи поверхности прямого провода диаметром $d=1$ мм при токе $I=10$ А возникает магнитное поле $B=4\mu_0 I/d\approx$ $\approx0{,}012$ Тл ($\mu_0=4\cdot10^{-7}$ В·с/(А·м) — магнитная постоянная). Магнитное поле тока тоже может служить причиной нарушения закона Ома.

На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца,

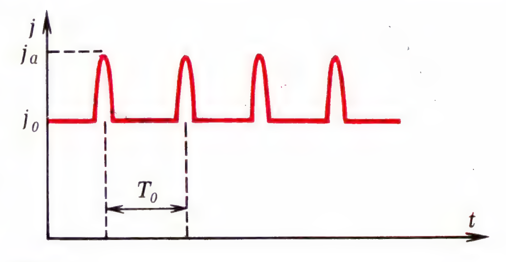


Рис. 5.

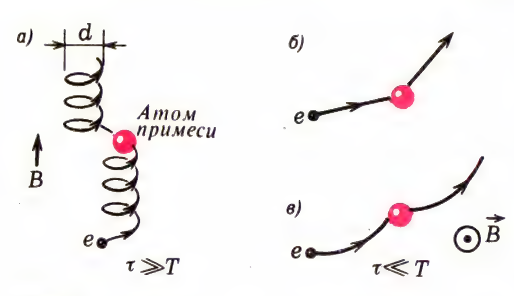


Рис. 6.

искривляющая его траекторию. Если индукция поля $\vec{B}$ перпендикулярна скорости $\vec{v}$ электрона, то траекторией электрона будет окружность радиуса $r = m^* v / eB$. Если угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{v}$ равен α, то электрон будет двигаться по спирали, диаметр которой $d = 2(m^* v / eB) \sin \alpha$, пролетая один виток спирали за время $T = 2\pi m^* / eB$.

В проводнике движение электрона по спирали возможно, если время свободного пробега $\tau \gg T$ (рис. 6, *а*). При этом диаметр спирали $d < vT$ во много раз меньше расстояния $l = v\tau$, на которое электрон смещается за время τ в отсутствие магнитного поля (рис. 6, *б*). Поэтому в течение времени τ электрон оказывается как бы запертым в трубке диаметром *d*. В результате сопротивление проводника в магнитном поле оказывается больше, чем при $B = 0$. Зависимость сопротивления *R* от магнитного поля, создаваемого «собственным» током, приводит, таким образом, к нарушению закона Ома.

Если же $\tau \ll T$, то между двумя последовательными столкновениями движение электрона мало отличается от прямолинейного (рис. 6, *в*); магнитное поле практически не меняет сопротивления проводника.

Индукция магнитного поля B_0, начиная с которой влияние поля становится существенным, находится из условия равенства периода обращения электрона по круговой орбите $T = 2\pi m^* / eB_0$ времени свободного пробега τ: $B_0 = 2\pi m^* / e\tau$. Для GaAs $m^* = 0{,}06\ m_e$ и $\tau \sim 10^{-13}$ с, поэтому $B_0 \approx 3$ Тл. Создать такое поле, пропуская через полупроводник ток, практически невозможно. При гораздо меньших токах образец разрушится. По металлу же, имеющему очень высокую проводимость, можно пропускать намного бóльшие токи. Кроме того, в чистых металлах, охлажденных до температуры жидкого гелия (около 4 К), время τ может достигать величины $\sim 10^{-9}$ с, значительно большей, чем в полупроводниках. Поэтому в металлах поле B_0 малó — порядка 0,01 Тл. Это примерно такое поле, которое возникает в проволоке диаметром 1 мм при токе 10 А.

На рисунке 7 приведена полученная экспериментально зависимость сопротивления *R* металлического проводника от величины тока *I* при гелиевой температуре. Видно, что с ростом тока сопротивление увеличивается в несколько раз. Электрическое поле в этом эксперименте было меньше 10^2 В/м, что намного меньше тех полей *E*, в которых наблюдаются отклонения от закона Ома в полупроводниках. Таким образом, влияние магнитного поля тока на сопротивление является в данном случае основной причиной нарушения закона Ома.

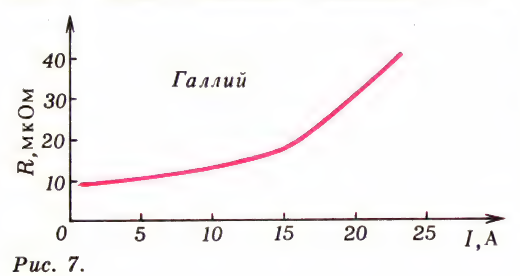


Рис. 7.

* * *

Мы рассмотрели физические причины, которые могут приводить к нарушению закона Ома в проводниках. При этом не были упомянуты наиболее важные в техническом отношении нелинейные элементы — диоды, транзисторы. Эти элементы специально делают неоднородными, и закон Ома нарушается в местах контакта разных проводящих материалов. Кроме того, мы обошли вниманием многочисленные нелинейные эффекты в проводниках, находящихся в переменных электрическом и магнитном полях... Но ведь «никто не обнимет необъятного».



Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$3|x-1|>x+1.$$

2. Решите уравнение

$$x^{3\lg x}=10x^2.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 4x+\sin 12x+\cos 4x=0.$$

4. Два автобуса одновременно выехали из A в B. Первый автобус имел скорость на 4 км/ч больше, чем второй, и прибыл в B на 10 мин раньше. Найдите скорости автобусов, если расстояние между A и B равно 48 км.

5. Медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, относятся как $\sqrt{2}:1$. Найдите углы треугольника.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2}=x-4.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{5^x-1}>\frac{1}{1-5^{x-1}}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x-\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{1}{2}.$$

4. Первый член геометрической прогрессии равен 2, а сумма первых восьми членов в 5 раз больше суммы первых четырех членов. Найдите девятый член прогрессии.

5. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K, причем угол AKB равен 30°. Найдите площадь треугольника ABC.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом $\alpha=30°$ к горизонту струя воды с начальной скоростью $v=10$ м/с. Площадь сечения отверстия шланга $S=5$ см^2. Определите массу воды, находящейся в воздухе. Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.

2. Какую силу тяги должен развивать двигатель на спутнике Земли массой m для того, чтобы он двигался по орбите радиусом R со скоростью, превышающей в 2 раза скорость свободного движения по этой орбите? Масса Земли M, гравитационная постоянная G.

3. Два тела бросают с высоты $h=20$ м со скоростью $v_0=15$ м/с каждое. С какими скоростями тела упадут на землю, если первое тело брошено вертикально вверх, а второе — горизонтально? Сопротивление воздуха не учитывать.

4. Баллон объемом $V_1=2$ л, содержащий 1 моль газа при температуре $t_1=27$ °С, соединили с другим баллоном объемом $V_2=4$ л, содержащим 2 моля этого же газа при температуре $t_2=87$ °С. Определите давление и температуру газа после установления равновесия. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

5. Смачиваемый водой кубик массой $m=200$ г плавает на поверхности воды. Ребро кубика имеет длину $a=10$ см. На каком расстоянии от поверхности воды находится нижняя грань кубика? Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.

6. Плоский воздушный конденсатор емкостью C подсоединен к источнику тока с напряжением U. Какую работу необходимо совершить, чтобы вдвое увеличить расстояние между обкладками конденсатора? Какую работу совершает при этом источник?

7. Электрон движется по окружности радиусом $R=10$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B=1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряженностью $E=100$ В/м. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет вдвое?

8. Первичная обмотка трансформатора включена в сеть переменного тока с напряжением $U_1=220$ В. Сила тока в первичной обмотке $I_1=0{,}5$ А. Пренебрегая потерями энергии, определите напряжение на концах вторичной обмотки и коэффициент трансформации, если сила тока во вторичной обмотке $I_2=0{,}1$ А.

9. Линза дает мнимое изображение предмета, увеличенное в два раза, если он находится от нее на расстоянии $d=5$ см. Какая это линза — собирающая или рассеивающая? Чему равно ее фокусное расстояние?

10. При распаде π-мезона, движущегося со скоростью $v=2\cdot10^8$ м/с, на два фотона зафиксированы фотоны, которые летят в противоположных направлениях. Определите отношение энергий этих фотонов. Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
Р. А. Ведерников, М. Р. Либерзон,
А. А. Симонов

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На прямой $x-2y=2$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2/2$.

2. Решите уравнение

$$\sin 5x-\cos(x+\pi/2)=\sin(2x-\pi/2).$$

3. Решите уравнение

$$\log_2(3x+5)=3-\log_2(x+1).$$

4. Решите неравенство

$$5^x+\frac{15}{2-5^x}<0.$$

5. Конус с углом α между образующей и высотой вписан в сферу радиусом R так, что его вершина находится в центре сферы, а окружность основания — на сфере. Все вершины нижнего основания правильной треугольной призмы (параллельного основанию конуса) лежат на сфере, а остальные ее вершины принадлежат боковой поверхности конуса. Какими должны быть высота и сторона основания призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найдите это значение площади.

Вариант 2

1. По плану одной бригаде нужно изготовить на 240 деталей больше, чем другой за то же время. Ввиду того, что в первой бригаде не работало 5 человек, а во второй — 4 человека, каждая бригада выполнила план на два дня позднее. Сколько рабочих выходило на работу в каждой бригаде, если каждый из них изготовлял по 6 деталей в день?

2. Решите уравнение

$$3\cos^2(x+\pi/2)+\cos^2 x=\sqrt{3}\cos x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2.$$

4. Найдите все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ x^2+y^2+p^2=2x+2py \end{cases}$$

имеет решение.

5. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида; в пирамиду вписан цилиндр, одно из оснований которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность другого основания касается всех боковых граней. Высота цилиндра и радиус его основания равны a. При какой высоте пирамиды объем шара будет наименьшим? Найдите это значение объема.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Веревка длиной $l=20$ м и массой $m=1$ кг переброшена через гвоздь, вбитый в вертикальную стену. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится, а затем в результате незначительного толчка начинает скользить по гвоздю. Каким будет импульс веревки, когда она соскользнет с гвоздя? Силами сопротивления пренебречь.

2. На концах и в середине невесомого стержня длиной l расположены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между плоскостью и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную поверхность.

3. Бетонная однородная свая массой m лежит на дне водоема глубиной h, большей, чем длина сваи l. Привязав трос к одному концу сваи, ее медленно вытаскивают из воды так, что центр тяжести сваи поднимается на высоту H от поверхности воды ($H>l$). Какая работа совершается при этом? Плотность бетона в n раз больше плотности воды. Силами сопротивления пренебречь.

4. На расстоянии R от центра незаряженного металлического шара находится точечный заряд q. Определите потенциал шара.

5. В однородном магнитном поле с индукцией B с постоянной скоростью v движется металлический шарик радиусом r. Укажите точки шарика, разность потенциалов между которыми будет максимальной, и определите эту разность потенциалов. Считать, что направление скорости составляет с направлением магнитной индукции угол α.

6. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл расположен плоский проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. При повороте витка через гальванометр протек заряд $Q=9{,}5\cdot10^{-3}$ Кл. На какой угол повернули виток? Площадь витка $S=10^3$ см^2, сопротивление витка $R=2$ Ом.

7. На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы равно F.

8. Определите, возможна ли ионизация невозбужденного атома водорода внешним электрическим полем с напряженностью $E=10^8$ В/м.

9. Минимальная энергия электрона, необходимая для ионизации атома водорода, равна W_0. Определите минимальные начальные энергии ионов водорода и гелия, необходимые для ионизации атома водорода. Считать, что ионизация происходит в результате абсолютно неупругого удара.

10. В периодической системе элементов рядом расположены три элемента. Условно назовем их a, b и c. Радиоактивный изотоп элемента a превращается в элемент b, а тот, в свою очередь,— в элемент c. Последний превращается в изотоп исходного элемента a. Какими процессами обусловлены переходы $a\to b$, $b\to c$, $c\to a$?

Публикацию подготовили
Л. П. Паршев, Ю. А. Струков

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

Вариант письменного экзамена

1. Решите уравнение

$$3|x-0{,}75|=x^2+4{,}5.$$

2. Вычислите при $a=1{,}2$

$$\frac{2\sqrt{2}-0{,}008a^3}{2+0{,}2\sqrt{2}a+0{,}04a^2}.$$

3. Три целых положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите третий член этой прогрессии, если ее второй член на 1 больше первого.

4. Найдите целое решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{7-x}{x+19}\geqslant 0,\\ x<-17.\end{cases}$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{5(5-x)}>-25-x.$$

6. Решите уравнение

$$0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$$

7. Вычислите 4^x, если $x=\log_2 5+\log_{0,25} 10$.

8. Решите уравнение

$$\log_{0,5}(\log_2 x-1)=-1.$$

9. Парабола $y=ax^2+9x+10$ касается прямой $y=15x+9$. Найдите значение параметра a.

10. Вычислите $25\sin^2\alpha\cos\alpha$, если α — острый угол и $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$.

11. Вычислите при $\alpha=-\dfrac{2\pi}{9}$

$$\frac{5(\cos 2\alpha-\cos 5\alpha)}{\sqrt{3}(\sin 5\alpha+\sin 2\alpha)}.$$

12. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\sin x-1=0{,}5\sin 2x-\cos x.$$

13. Площадь равнобедренной трапеции равна 32. Котангенс угла между диагональю трапеции и ее основанием равен 2. Найдите длину высоты трапеции.

14. Окружности радиусами 8 и 3 касаются внутренним образом. Из центра большей окружности проведены касательная к меньшей окружности. Найдите длину касательной.

15. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3. Диагональ боковой грани призмы, проходящей через другой катет, составляет с плоскостью основания призмы угол 45°. Высота призмы равна 4. Найдите площадь полной поверхности призмы.

16. Металлический шар радиусом $\sqrt[3]{2}$ перелит в конус. Площадь боковой поверхности конуса в 3 раза больше площади его основания. Найдите высоту конуса.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Скорость тела, брошенного вертикально вниз с некоторой высоты, через $t_1=1$ с увеличилась по сравнению с начальной в $n_1=6$ раз. Во сколько раз увеличится его скорость через $t_2=2$ с после броска? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Тело массой $m=0{,}5$ кг, падая без начальной скорости с высоты $H=9$ м, приобрело вблизи поверхности земли скорость $v=12$ м/с. Найдите силу сопротивления воздуха, считая ее постоянной. Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

3. Груз массой $m=7$ кг поднимают на веревке с поверхности земли вертикально на высоту $H=1$ м один раз с постоянной скоростью, второй раз с ускорением $a=2$ м/с^2. На какую величину работа во втором случае больше, чем в первом?

4. Однородный шар плавает на поверхности воды, наполовину погруженный в воду. Чему равен объем шара, если на него действует выталкивающая сила $F=2$ Н? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2, плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.

5. Газ, находящийся в цилиндре под поршнем, нагрели при постоянном давлении так, что его объем увеличился в 1,5 раза. Затем поршень закрепили и нагрели газ так, что его давление возросло в 2 раза. Чему равно отношение конечной температуры (абсолютной) газа к его начальной температуре?

6. В изотермическом процессе газ совершил работу $A=1000$ Дж. На какую величину увеличится внутренняя энергия этого газа, если ему сообщить количество теплоты, вдвое большее, чем в первом случае, а процесс проводить изохорически?

7. После того как конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_1=500$ В, соединили параллельно с незаряженным конденсатором емкостью $C_2=4$ мкФ, между обкладками конденсаторов установилась разность потенциалов $U_2=100$ В. Чему равна емкость первого конденсатора?

8. Какой заряд проходит в течение $t=5$ с через поперечное сечение проводника, если за этот промежуток времени ток равномерно возрастает от $I_1=0$ до $I_2=12$ А?

9. Шарик, подвешенный на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания и после начала движения проходит путь, равный пяти амплитудам его колебаний, за $t=10$ с. Чему равен период колебаний шарика?

10. Во сколько раз масса фотона, соответствующего инфракрасному свету с $\lambda=800$ нм, меньше массы фотона, соответствующего ультрафиолетовому свету с частотой $\nu=1{,}5\times10^{15}$ Гц? Скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с.

Вариант 2

1. Тело брошено вертикально вверх с высоты $H=20$ м с начальной скоростью $v_0=3$ м/с. На какой высоте окажется тело через $t=2$ с после начала движения? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

2. Шарик массой $m=4$ кг, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити длиной $l=1$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда она образует с вертикалью угол $\alpha=60°$. В этот момент скорость шарика $v=1{,}5$ м/с. Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

3. На горизонтальной поверхности лежит лом, длина которого $l=1{,}5$ м. Масса лома $m=10$ кг. На сколько изменится потенциальная энергия лома, если его перевести в вертикальное положение? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

4. Требуется заменить силу $F=5$ Н двумя силами, действующими вдоль той же прямой, но в противоположных направлениях. Меньшая из этих сил $F_1=11$ Н. Какова величина второй силы?

5. Какой объем занимает газ при температуре $T=300$ К и давлении $p=414$ Па, если число молекул газа $N=5\cdot10^{24}$? Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

6. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Каков КПД трансформатора, если при полной мощности $P=60$ кВт масло массой $m=60$ кг нагревается на $\Delta t=30$ °C за $\tau=4$ мин работы трансформатора? Удельная теплоемкость масла $c=2000$ Дж/(кг·К).

7. Два одинаковых маленьких металлических шарика, заряженных одноименными зарядами, находятся на расстоянии $l_0=1$ м друг от друга. Заряд одного из них в 4 раза больше заряда другого. Шарики привели в соприкосновение и развели на некоторое расстояние. Найдите это расстояние, если сила взаимодействия шариков осталась прежней?

8. Два проводника, сопротивления которых $R_1=7$ Ом и $R_2=5$ Ом, соединяют параллельно и подключают к источнику тока. В первом проводнике в течение некоторого времени выделилось количество теплоты $Q_1=300$ Дж. Какое количество теплоты выделится во втором проводнике за то же время?

9. Колебательный контур с конденсатором емкостью $C_1=1$ мкФ настроен на частоту $\nu_1=400$ Гц. Если параллельно этому конденсатору подключить другой конденсатор, то частота колебаний в контуре становится равной $\nu_2=200$ Гц. Определите емкость второго конденсатора.

10. Предмет находится на расстоянии $d=0{,}05$ м от двояковыпуклой линзы, а его мнимое изображение — на расстоянии $f=0{,}5$ м. Чему равна оптическая сила этой линзы?

Публикацию подготовили Б. М. Писаревский, Д. Д. Ходкевич

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\left[\left(\frac{a^2-a\sqrt[4]{b}+\sqrt{b}}{a^3+\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt{b}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^2+a\sqrt[4]{b}+\sqrt{b}}{a^3-\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt{b}}\right)^{-1}\right]^{-1}\times$$
$$\times 36^{\log_6\sqrt{2a}}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2-3y+5=0,\\ 3x^2-11x+3y^2-7y+10=0. \end{cases}$$

3. Двое рабочих за час делают 33 детали, причем производительность одного из них на 20 % выше. Сколько деталей в час делает каждый рабочий?

4. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{x}{5}\left(\sin x-4\cos 6x+5\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\lg^2(2x-\pi)+$ $+\lg^2(10\pi-x)>0$.

5. В круге дана точка на расстоянии 15 см от центра; через эту точку проведена хорда, которая делится ею на две части: 7 см и 25 см. Найдите длину радиуса круга.

6. Сформулируйте теорему о производной частного двух функций (без доказательства).

Вариант 2

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}+\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}\right)^4.$$

2. Решите неравенство

$$(\lg 100)\log_3(x+2)\leqslant\log_3(3x+10).$$

3. От пристани A к пристани B отправилась лодка со скоростью 10 км/ч, а через час после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние между пристанями, если пароход пришел к пристани B на час раньше лодки?

4. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{2}\sin 3x-\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x+\cos\left(\frac{\pi-6x}{2}\right)\times$$
$$\times\cos x=0,$$

принадлежащие области определения функции $y=4\operatorname{tg}2x+\sqrt{3\pi^2-5\pi x-8x^2}$.

5. В прямом круговом конусе отношение площади основания к площади боковой поверхности равно m, а длина образующей равна l. Найдите объем конуса.

6. Перечислите формулы приведения для синуса и косинуса (без доказательства).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи. Работа и мощность тока.

2. В гирлянде для новогодней елки последовательно соединены двенадцать одинаковых лампочек. Как изменится мощность, потребляемая гирляндой, если в ней оставить только шесть лампочек?

3. Ракета с работающим двигателем «зависла» над поверхностью Земли. Какова мощность, развиваемая двигателем, если масса ракеты M, а скорость истечения газов из двигателя v? Изменением массы ракеты за счет истечения газов можно пренебречь.

4. При медленном подъеме тела по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30°$ и коэффициентом трения $\mu=0{,}1$ совершена работа $A=6$ Дж. Какое количество теплоты выделилось при этом?

5. Собирающаяся линза дает прямое изображение предмета с увеличением $\Gamma=2$. Расстояние между предметом и изображением $a=22{,}5$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. Принцип действия тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение. Тепловые двигатели и охрана природы.

2. Как построить сильный электромагнит, если поставлено условие, чтобы ток в электромагните был сравнительно слабым?

3. Стальной шарик, упавший без начальной скорости с высоты $H=2$ м на стальную плиту, отскакивает от нее с потерей $\eta=6{,}25$ % кинетической энергии. Найдите время, которое проходит от начала движения шарика до его второго падения на плиту.

4. Определите ЭДС аккумулятора, подзаряжаемого от сети с напряжением $U=12$ В, если половина потребляемой энергии выделяется в аккумуляторе в виде тепла.

5. Один моль газа, имевший начальную температуру $T=300$ К, изобарно расширился, совершив работу $A=12{,}5\cdot10^3$ Дж. Во сколько раз при этом увеличился объем газа?

Публикацию подготовили
В. И. Прохоренко, А. Н. Седов

Ответы, указания, решения

Гиганты

1. Чтобы «превзойти» Евдокса, понадобится около 5 суток, Тихо Браге — 25 суток (почти месяц), Улугбека — почти 70 суток (больше двух месяцев). И эти цифры еще следует считать заниженными, так как дифракционный предел, из которого мы исходили при расчете,— недостижимый идеал. Оптические приборы считаются отличными, если удается разрешить угол, вдвое превышающий дифракционный.
2. Аристарх вычислил, что Земля больше Луны в 3 раза. По современным данным — в 3,67 раза.
3. Расчет по данным Аристарха дает отношение размеров Солнца и Луны, равное 19, по современным данным получаем 400. Даже и по данным Аристарха диаметр Солнца оказывается в 6 с лишним раз больше диаметра Земли, а значит, по объему Солнце больше Земли почти в 250 раз. Трудно поверить, что такой гигант «крутится» вокруг крошечной Земли.
4. По Эратосфену — 47,5 тыс. км, по Посидонию — 45,6 тыс. км, по современным данным — 40,0 тыс. км. Если же принять стадий за 157 м, то Эратосфен получил 39,25 (!), а Посидоний — 37,68 тыс. км. Такое ухудшение точности становится совсем непонятным, если учесть, что Эратосфен измерял высоту Солнца, которое само имеет угловой размер около 0,5°, а Посидоний — высоту звезды (Канопус).
5. При движении к Юпитеру Земля получает сигнал об очередном затмении Ио раньше на время v_3t_0/c, где v_3 — скорость Земли, t_0 — период обращения Ио вокруг Юпитера, c — скорость света. При движении от Юпитера сигнал на такое же время запаздывает. Значит,

$$t_0=(t_1+t_2)/2 \text{ и } t_2-t_1=v_3(t_2+t_1)/c.$$

Отсюда получаем

$$c=v_3(t_2+t_1)/(t_2-t_1)=3{,}04\cdot10^5 \text{ км/с}.$$

Ошибка порядка 1 % естественна — примерно с такой точностью мы «замерили» разность времен между затмениями.

Тригонометрия помогает алгебре

1. $\left\{-\frac{\sqrt5+1}{4};\ \frac{\sqrt5+1}{4}\right\}$.

2. $\{2\}$.

3. $\left\{-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{8};\ \frac{\sqrt2}{4}\right\}$.

4. $\left\{\left(\frac12\sqrt{2+\sqrt2};\ \frac12\sqrt{2-\sqrt2}\right);\right.$ $\left(-\frac12\sqrt{2-\sqrt2};\ \frac12\sqrt{2+\sqrt2}\right);$ $\left(-\frac12\sqrt{2+\sqrt2};\ -\frac12\sqrt{2-\sqrt2}\right);$ $\left.\left(\frac12\sqrt{2-\sqrt2};\ -\frac12\sqrt{2+\sqrt2}\right)\right\}$.

5. Три корня.

6. $x=\frac{4}{\sqrt{13}},\ y=\frac{6}{\sqrt{13}},\ z=\frac{9}{\sqrt{13}},\ v=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант 1

1. $\left(-\infty;\ \frac12\right)\cup(2;\ +\infty)$.

2. $\left\{10;\ \frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right\}$.

3. $\frac{\pi}{8}(2n+1)$, $\frac{\pi}{48}(6n+(-1)^{n+1})$, $n\in\mathbf{Z}$
4. 36 км/ч, 32 км/ч
5. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Вариант 2
1. $\{7\}$.
2. $\left(0;\ \ln\frac{5}{3}\right)\cup(1;\ +\infty)$.
3. $\frac{\pi}{8}(2n+1)$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$
4. $b_9=32$.
5. 18.

Физика
1. $m=(2\rho Sv^2\sin\alpha)/g=5$ кг.
2. $F=3GmM/R^2$.
3. Оба тела упадут на землю с одной и той же скоростью $v=\sqrt{v_0^2+2gh}=25$ м/с.
4. $p=R(T_1+2T_2)/(V_1+V_2)=14{,}1\cdot10^5$ Па; $t=(t_1+2t_2)/3=67$ °C.
5. $x=(mg+4a\sigma)/(\rho ga^2)=2$ см.
6. $A_1=CU^2/4$; $A_2=-CU^2/2$.
7. $t=BR/E=0{,}001$ с.
8. $U_2=I_1U_1/I_2=1100$ В; $k=U_1/U_2=1/5$.
9. Линза собирающая; $F=2d=10$ см.
10. $E_1/E_2=(c+v)/(c-v)=5$.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. $(1;\ -1/2)$. Указание. Пусть $A(x_1, ax_1^2)$ и $B(x_2, ax_2^2)$ — точки параболы $y=ax^2$. Касательные в точках A и B пересекаются в точке (x_0, y_0), координаты которой удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y_0=2ax_1x_0-ax_1^2, \\ y_0=2ax_2x_0-ay_0^2, \end{cases}$$

откуда $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_0=ax_1x_2$. Так как две прямые с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2=-1$, наши касательные будут перпендикулярны, если $4a^2x_1x_2=-1$, или $x_1x_2=-1/(4a^2)$. Откуда получаем $y_0=-1/(4a)$. Итак, если две касательные к параболе $y=ax^2$ перпендикулярны, то их точка пересечения лежит на прямой $y=-1/(4a)$. В нашем случае это прямая $y=-1/2$.

2. $(-1)^{k+1}\pi/18+\pi k/3$, $\pi(2k+1)/4$, $k\in\mathbf{Z}$.
3. $\{1/3\}$.
4. $(\log_5 2;\ 1)$.
5. $0{,}5R/\cos(\alpha/2)$; $R\sqrt{3}\sin(\alpha/2)$; $3\sqrt{3}R^2\times\times\operatorname{tg}(\alpha/2)/2$. Указание. Проведем осевое сечение конуса, в котором лежит боковое ребро BC призмы (рис. 1). Так как вершина B призмы лежит на сфере, $SB=SA-R$. Пусть $h=BC$, $r=EC=BD$ — радиус окружности, описанной вокруг основания призмы, $\beta=\angle BSG$. Тогда $r=R\sin\beta$, $h=R\cos\beta-r\operatorname{ctg}\alpha=R\times(\cos\beta-\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha)$, и площадь боковой поверхности призмы равна $S(\beta)=3\sqrt{3}rh=$

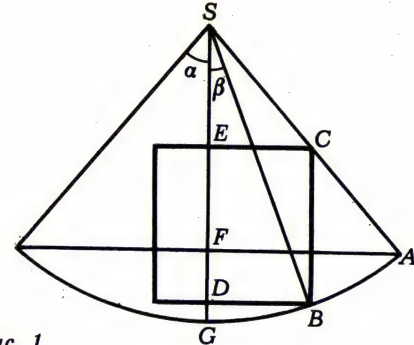


Рис. 1.

$=3\sqrt{3}R^2(\cos\beta\sin\beta-\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha)$, $0<\beta<\alpha$. Исследуем функцию $S(\beta)$ с помощью производной. Равенство $S'(\beta)=0$ означает, что $\operatorname{ctg}2\beta=\operatorname{ctg}\alpha$.
На промежутке $0<\beta<\alpha$ это уравнение имеет один корень $\beta=\alpha/2$, причем $S''(\beta)$ при переходе β через $\alpha/2$ меняет знак с плюса на минус, так что при $\beta=\alpha/2$ значение площади — наибольшее. Окончательно получаем $r=R\sin(\alpha/2)$; сторона основания $a=R\sqrt{3}\times\sin(\alpha/2)$; $h=0{,}5R/\cos(\alpha/2)$; $S=3\sqrt{3}R^2\times\operatorname{tg}(\alpha/2)/2$.

Вариант 2

1. 20 и 16 человек. Указание. Если x и y — количества рабочих в бригадах, а t — время работы, то по условию

$$\begin{cases} (x+5)(t-2)=xt, \\ (y+4)(t-2)=yt, \\ 6(x-y)t=240. \end{cases}$$

2. $\pm\pi/6+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.
3. $\{9/2\}$.
4. $-2\leqslant p\leqslant 1/4$. Указание. Возможные значения y удовлетворяют системе $y^2-(2p-1)y+p^2=0$, $y\geqslant-1$. В свою очередь, это значит, что $\frac{2p-1+\sqrt{1-4p}}{2}\geqslant-1$, $p\leqslant\frac{1}{4}$.
5. $3a$; $9a/4$. Указание. Пусть $2b$ — длина стороны основания пирамиды, H — высота пирамиды, R — радиус сферы. Тогда (рис. 2) $\frac{O_1E}{KF}=\frac{SO_1}{SK}$, или $b/a=H/(H-a)$, отсюда $b^2=a^2H^2/(H-a)^2$.

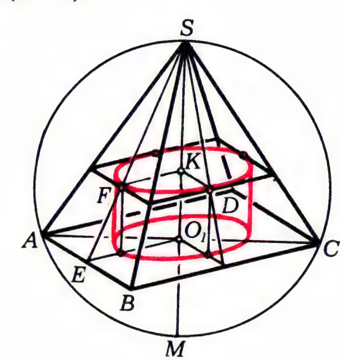


Рис. 2.

Так как $AO_1^2 = SO_1 \cdot O_1M$, или $(b\sqrt{2})^2 = H(2R-H)$, то $2a^2H/(H-a)^2 = H(2R-H)$. Отсюда $R(H) = H/2 + a^2H/(H-a)^2$, $a<H<+\infty$.

$$R'(H) = \frac{1}{2} - a^2\frac{a+H}{(H-a)^3} = \frac{H^3-3H^2a+Ha^2-3a^3}{2(H-a)^3} = \frac{(H^2+a^2)(H-3a)}{2(H-a)^3}.$$

Производная $R'(H)$ равна нулю при $H=3a$, поэтому $\min R(H) = R(3a) = 9a/4$.

Физика

1. $P = m\sqrt{gl/2} = 10$ кг·м/с.
2. $v = 2\sqrt{3gl/5}$.
3. $A = mg(H + h(1-1/n))$.
4. $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 R)$.
5. $U_{max} = 2vrB\sin\alpha$; точки лежат на концах диаметра, перпендикулярного скорости шарика.
6. $\alpha = \arccos(1 - RQ/(BS)) = 155°$.
7. $d = 2F$.
8. Ионизация невозможна.
9. $W_{вод} = 2W_0$; $W_{гел} = 5W_0$.
10. Первый и второй переходы обусловлены β-распадом, а третий — α-распадом.

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

1. —1,5. 2. —0,24. 3. 4. 4. —18. 5. 5. 6. 6. 7. 2,5. 8. 8. 9. 9. 10. 7,2. 11. —5. 12. 90. 13. 4. 14. 4. 15. 60. 16. 4.

Физика

Вариант 1

1. $n_2 = 1 + (n_1-1)t_2/t_1 = 11$.
2. $F_c = m(g - v^2/(2H)) = 1$ Н.
3. $\Delta A = maH = 14$ Дж.
4. $V = 2F/(\rho g) = 4\cdot10^{-4}$ м^3.
5. $\frac{T_3}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{V_2}{V_1} = 3$.
6. $\Delta U = 2A = 2000$ Дж.
7. $C_1 = C_2U_2/(U_1-U_2) = 1$ мкФ.
8. $q = (I_1+I_2)t/2 = 30$ Кл.
9. $T = 4t/5 = 8$ с.
10. $m_1/m_2 = c/(\lambda\nu) = 1/4$.

Вариант 2

1. $h = H + v_0t - gt^2/2 = 6$ м.
2. $T = m(g\cos\alpha + v^2/l) = 29$ Н.
3. $\Delta E_p = mgl/2 = 75$ Дж.
4. $F_2 = F_1 + F = 16$ Н.
5. $V = NkT/p = 50$ м^3.
6. $\eta = (1 - cm\Delta t/(P\tau))100\,\% = 75\,\%$.
7. $l = 5l_0/4 = 1,25$ м.
8. $Q_2 = Q_1R_1/R_2 = 420$ Дж.
9. $C_2 = C_1((\nu_1/\nu_2)^2 - 1) = 3$ мкФ.
10. $D = (f-d)/(df) = 18$ дптр.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $1 (a>0,\ b\geqslant 0,\ a\neq\sqrt[4]{b})$.
2. (1; 2), (3; 1).
3. 15 и 18 деталей.
4. $\left\{5\pi;\ \frac{9}{2}\pi;\ \frac{13}{2}\pi;\ \frac{17}{2}\pi\right\}$.
5. 20 см.

Вариант 2

1. $f'(x) = 4\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$, $x\geqslant 1$.
2. $x \in (-2;\ 2]$.
3. 40 км.
4. $\left\{-\frac{7}{8}\pi;\ -\frac{3}{8}\pi;\ \frac{1}{8}\pi\right\}$.
5. $\frac{1}{3}\pi l^3m^2\sqrt{1-m^2}$.

Физика

Вариант 1

2. Мощность увеличится в два раза.
3. $N = Mgv/2$.
4. $Q = A\mu/(\mu + \mathrm{tg}\,\alpha) \approx 0,9$ Дж.
5. $F = a\Gamma/(\Gamma-1)^2 = 0,45$ м.

Вариант 2

2. Обмотка электромагнита должна содержать большое число витков тонкого провода.
3. $t = (1 + 2\sqrt{1-\eta})\sqrt{2H/g} \approx 1,9$ с.
4. $\mathscr{E} = U/2 = 6$ В.
5. $\alpha = 1 + A/(\nu RT) \approx 6$.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 4)

Вопросы и задачи

1. В полночь скорость собственного вращения Земли добавляется к орбитальной скорости движения Земли вокруг Солнца, в полдень — вычитается из нее.
2. Для северного полушария — зимой, поскольку в это время Земля проходит свой перигелий.
3. Кольцо Сатурна не может быть твердым и сплошным.
4. Ускорения, сообщаемые Солнцем Земле и Луне, примерно одинаковы. Поэтому Земля и Луна образуют единую систему двух тел, обращающихся вокруг общего центра масс, а центр масс системы обращается вокруг Солнца.
5. Нет, так как (в отличие от случая движения по круговой орбите) сила тяготения попеременно совершает положительную и отрицательную работу, следовательно, скорость планеты или спутника то возрастает, то убывает.
6. Спутник не может все время «висеть» над таким районом — ведь плоскость орбиты спутника должна проходить через центр Земли.
7. Нет. Земля и Луна обращаются вокруг разных притягивающих центров.
8. Ничего, поскольку тела в экваториальной зоне уже обладают такой скоростью.
9. С такой же, с какой стол давит на Землю,— с силой, равной по величине силе тяжести стола.
10. Скорость спутника, несмотря на сопротивление воздуха, возрастает. Хотя из-за трения в атмосфере механическая энергия спутника

уменьшается, лишь часть потенциальной энергии переходит в тепло; остальная ее часть преобразуется в кинетическую энергию.

Мысленный микроопыт

Невесомость и весомость не имеют отношения к удару, в этом случае важны масса и скорость; так что, работая в будущем в открытом космосе, старайтесь не стукаться о корабль.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 4)

1. 9/8 и 3/2.
2. Достаточно рассмотреть лишь буквы с номерами 1, 2, 11, 12, 21 и 22. Это А, Б, К, Л, У, Ф. В результате получаем маршрут поезда: БАКУ — УФА.
3. 1354+1354+1354+1354=5416.
4. Все площади одинаковы.
5. 7641—1467=6174.

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 4)

1. 5/2. Решение. Пусть

$$m=an+c,$$
$$m+n=b(m-n)+c,$$

где $a\geqslant 1$, $b\geqslant 1$, $c<n$, $c<m-n$. Если $a=1$, то $c=m-n$, что противоречит предыдущему. Значит, $a>1$, откуда $m>2n$, $n<m/2$, $m+n<3m/2$, $m-n>m/2$ и $b<3$. Остаются возможности $b=1$ и $b=2$. Если $b=1$, то $m+n=m-n+c$ и $c=2n$, что невозможно ввиду $c<n$. Значит, $b=2$, $m+n=2(m-n)+c$, $m=3n-c$, откуда $a=2$, $m=2n+c$, $c=n/2$ и $m=5n/2$.

2. Если a — некоторый член арифметической прогрессии и d — ее разность, то $a(a+1)=a+ad$ — тоже член нашей арифметической прогрессии. Значит, вместе с каждым числом наша прогрессия содержит это число, умноженное на $d+1$; значит, она содержит целую геометрическую прогрессию с знаменателем $d+1$. (При $d=0$ это рассуждение не проходит, но, очевидно, факт все равно верен.)

3. $a^2>4b$, $a<0$, $b>0$. Действительно, число x тогда и только тогда является решением нашего уравнения, когда число $|x|$ является решением квадратного уравнения $y^2+ay+b=0$. Значит, наше уравнение имеет 4 решения тогда и только тогда, когда указанное квадратное уравнение имеет 2 положительных различных решения.

4. Длины l_i сторон нашего треугольника ABC удовлетворяют неравенству $1\leqslant l_i<\sqrt{2}$. Из теоремы косинусов вытекает, что треугольник остроугольный. Значит, к каждой стороне примыкает хотя бы один угол, больший 45°, и, значит, длины высот больше $1\cdot\sin 45°=\sqrt{2}/2$. Предположим теперь, что центр квадрата не лежит внутри треугольника ABC; пусть он либо расположен на стороне AB, либо лежит с вершиной C по разные стороны от стороны AB. Спроектируем квадрат вместе с треугольником на прямую, перпендикулярную AB (рис. 3). Проекция треугольника есть отрезок, равный высоте, опущенной на AB, т. е. его длина больше $\sqrt{2}/2$; с другой стороны, он содержится в половине проекции квадрата, которая по длине не превосходит половины диагонали, т. е. $\sqrt{2}/2$. Противоречие.

5. Кольцо, центром которого служит середина отрезка, соединяющего центры данных окружностей, а радиусы внешней и внутренней окружностей равны, соответственно, полусумме и полуразности радиусов данных окружностей. Доказательство. Пусть R и r — радиусы данных окружностей ($R>r$). Зафиксируем точку A большей окружности. Середины отрезков, соединяющих ее с точками меньшей окружности, составляют окружность радиусом $r/2$, центр B которой совпадает с серединой отрезка, соединяющего точку A с центром меньшей окружности (рис. 4). Когда точка A пробегает бóльшую окружность, точка B пробегает окружность радиусом $R/2$, центром которой служит середина отрезка, соединяющего центры данных окружностей, а построенная выше окружность радиусом $r/2$ заметает указанное кольцо (рис. 5).

6. $2\leqslant x<\sqrt{5}$. Решение. Целая степень двойки равна целой степени тройки только если показатели степени равны 0. Значит, $[x^2-4]=0$ и $[1/x]=0$, т. е. $2\leqslant|x|<\sqrt{5}$ и $x>1$.

7. $x=y=\pm1$. Решение. Вычтем из первого уравнения второе и из второго уравнения третье. Получим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ 3x^2+y^2=4, \end{cases}$$

имеющую четыре решения: $x=\pm1$, $y=\pm1$. Эти решения мы должны подставить в любое из уравнений данной системы, скажем в первое (если оно будет выполнено, то два других будут выполнены автоматически). Видно, что два из найденных решений, указанные в ответе, годятся, а остальные не годятся.

8. Да. Доказательство. Действительно, многочлен $x(x-1)(x-2)...(x-12)/13$ принимает в целых точках целые значения, а коэффициент при x^{13} у него равен 1/13. (Добавим, что многочлен, принимающий в целых точках целые значения, всегда имеет вид $a_0P_0+a_1P_1+...+a_NP_N$, где a_0, a_1, ..., a_N — целые числа, а

$$P_n(x)=\frac{x(x-1)(x-2)...(x-(n-1))}{n!}.$$

В частности, любое рациональное число может

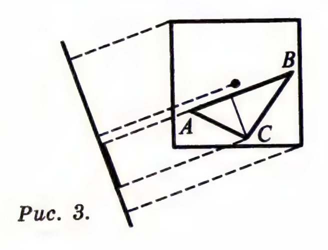


Рис. 3.

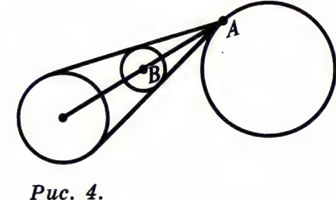
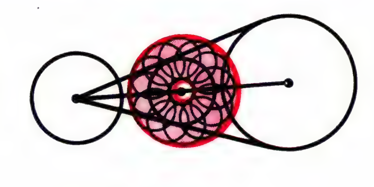


Рис. 4.


Рис. 5.

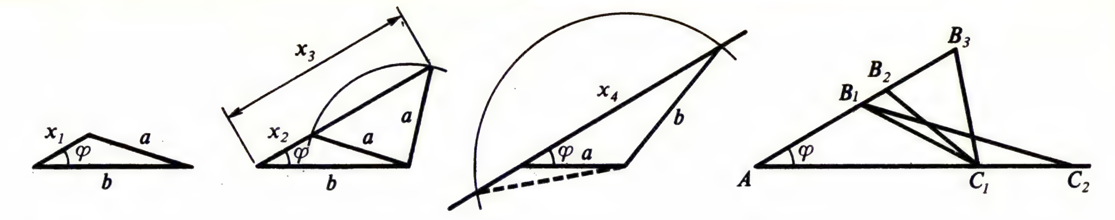


Рис. 6.

Рис. 7.

быть коэффициентом такого многочлена, но никакое иррациональное число быть им не может.)

9. 3. Доказательство. $10^{n+1}-10^n=360\times\times 25\cdot 10^{n-3}$, поэтому $\sin(10^{n+1})^0=\sin(10^n)^0$ при $n\geqslant 3$. Следовательно, в нашей последовательности все члены, начиная с четвертого, одинаковы. Ясно, далее, что $\sin 1^\circ>0$, $\sin 10^\circ>>0$, $\sin 100^\circ>0$ и $\sin 1000^\circ=\sin 280^\circ<0$. Таким образом, в нашей последовательности первые 3 члена положительны, а остальные — отрицательны.

10. 1 или 5. Решение. В действительности верно, что из трех длин проекций отрезка на стороны правильного треугольника одна равна сумме двух других. Это можно доказать так. Пусть при проекции отрезка на стороны правильного треугольника его длина умножается, соответственно, на α, β, γ. Но тогда и при проектировании сторон этого треугольника на прямую, содержащую наш отрезок, их длины умножаются на α, β, γ. В то же время ясно, что проекция одной из сторон треугольника есть сумма проекций двух других его сторон.

11. а) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$; б) три. Решение. а) Пусть x, y, z — длины сторон нашего треугольника, причем сторона z лежит против угла 30°. По теореме косинусов

$$z^2=x^2+y^2-xy\sqrt{3}.$$

Мы должны подставить вместо двух из трех величин x, y, z числа 2 и 1 и потом найти третью величину. Всего существует 6 способов подстановки, но поскольку x и y входят в уравнение симметричным образом, можно ограничиться тремя: $x=2$, $y=1$; $x=2$, $z=1$; $x=1$, $z=2$. В каждом из трех случаев получается квадратное уравнение; решая эти уравнения, находим: $z=\pm\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{2}$. Условию задачи (искомая сторона имеет длину от 1 до 2) удовлетворяют два решения: $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ и $\sqrt{3}$. б) Если проигнорировать условие, что длина третьей стороны заключена между a и b, то задача может иметь четыре решения (рис. 6). Но указанному условию удовлетворяют не более трех. Чтобы убедиться в этом, изобразим все четыре решения на одном чертеже (рис. 7). На этом чертеже $AB_1=C_1B_2=C_1B_3=a$ и $AC_1==B_1C_2=b$. Решениями задачи служат отрезки B_1C_1, AB_2, AB_3 и AC_2. Легко подобрать a, b и φ так, чтобы AB_2 и AB_3 были не меньше a и не больше b. Но при этом точки B_1, B_2 и B_3 должны идти в таком порядке, как на чертеже ($AB_2\geqslant a$ и $AB_3\geqslant a$). Угол B_2C_1A острый, тем более угол B_1C_1A острый. Значит, если $B_1C_1\leqslant b$, то точка C_2 находится дальше от точки A, чем C_1, и, значит, $AC_2>b$.

12. Пусть

$$A(x)=x^3+ax^2+bx+c=0,$$
$$B(x)=x^2+px+q=0$$

— наши кубическое и квадратное уравнения. Легко видеть, что

$$C(x)=A(x)-(x-(p-a))B(x)$$

— многочлен с рациональными коэффициентами степени не выше первой. Общий корень многочленов $A(x)$ и $B(x)$ является корнем и многочлена $C(x)$. Если многочлен $C(x)$ не равен 0 тождественно, то этот корень рационален, если же $C(x)\equiv 0$, то

$$A(x)=(x-(p-a))B(x)$$

и, значит, рациональное число $p-a$ является корнем многочлена $A(x)$.

13. $a=b=c=\pm 1$. Решение. Действительно, если $(x-a)^4+(x-b)^4+(x-c)^4=0$, то $x-a==x-b=x-c=0$, откуда $x=a=b=c$. Значит, вторая функция имеет вид $2((x-a)^4+(x++a)^4)=4(x^4+6a^2x^2+a^4)$. Это — четная функция, возрастающая при $x>0$. Значит, она достигает своего минимума при $x>0$. Значит, она достигает своего минимума при $x=0$, и этот минимум равен $4a^4$. Следовательно, $4a^4=4$ и $a=\pm 1$.

14. $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+\frac{1}{19})\pi$, $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Решение. Поскольку все функции, входящие в цепочку неравенств, периодичны с периодом 2π, достаточно решить задачу, предположив, что $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. Неравенство

$$\sin mx\leqslant\sin(m+1)x$$

равносильно неравенству

$$2\cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\geqslant 0.$$

Так как $\sin(x/2)\geqslant 0$ при $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, последнее

0 π 2π
A_1
A_2
A_3
A_4
. . . .
A_9

Рис. 8.

неравенство на нашем интервале равносильно неравенству

$$\cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right)\geqslant 0.$$

Решением последнего неравенства служит объединение отрезков $\left[\frac{-\pi+4k\pi}{2m+1};\ \frac{\pi+4k\pi}{2m+1}\right]$. Обозначим это объединение через A_m. Решением нашей задачи служит пересечение множеств A_1, A_2, ..., A_9. Из рисунка 8 видно, что это пересечение состоит из отрезка $[0;\ \pi/19]$ и точки π.

15. Пусть a, b, c — длины сторон данного остроугольного треугольника. Мы должны найти x, y, z из системы уравнений $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $z^2+x^2=c^2$. Получаем: $x^2=c^2+a^2-b^2$, $2y^2=a^2+b^2-c^2$, $2z^2=b^2+c^2-a^2$; положительность правых частей этих равенств равносильна остроугольности треугольника.



103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, С. Ф. Лухин, И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Т. С. Вайсберг

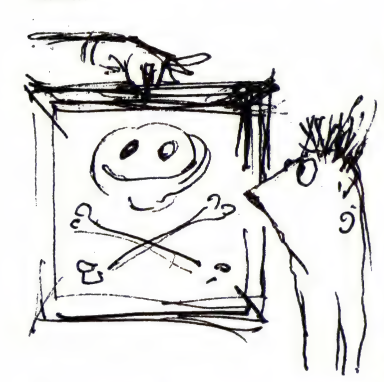
Сдано в набор 23.02.89. Подписано к печати 13.04.89
Т-08960. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,78
Тираж 190 045 экз. Заказ 342. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

„Квант" улыбается

Советы экзаменатору

1. Прежде всего разъясните экзаменуемому, что вся его профессиональная карьера может рухнуть из-за его неудачного ответа. Подчеркните ему важность ситуации. Поставьте его на место с самого начала.



2. Сразу задайте самые трудные вопросы. Если первый вопрос достаточно труден или запутан, экзаменуемый слишком разнервничается, чтобы отвечать на следующие вопросы, как бы просты они ни были.



3. Обращаясь к экзаменуемому, сохраняйте сдержанность и сухость, с экзаменаторами же будьте очень веселы. Эффектно обращаться время от времени к другим экзаменаторам с насмешливыми замечаниями по поводу ответов экзаменуемого, игнорируя его самого, как будто его нет в помещении.



4. Заставляйте экзаменуемого решать задачи вашим методом, особенно если этот метод необычен. Ограничивайте экзаменуемого, вставляя в каждый вопрос множество указаний и оговорок. Идея состоит здесь в усложнении задачи, которая без этого была бы весьма проста.



5. Вынудите экзаменуемого сделать тривиальную ошибку, и пусть он ломает голову над ней как можно дольше. Сразу же после того, как он заметит ошибку, но как раз перед тем, как он поймет, как ее исправить, презрительно поправьте его сами. Это требует высокой проницательности и точности выбора момента, что достигается только большой практикой.



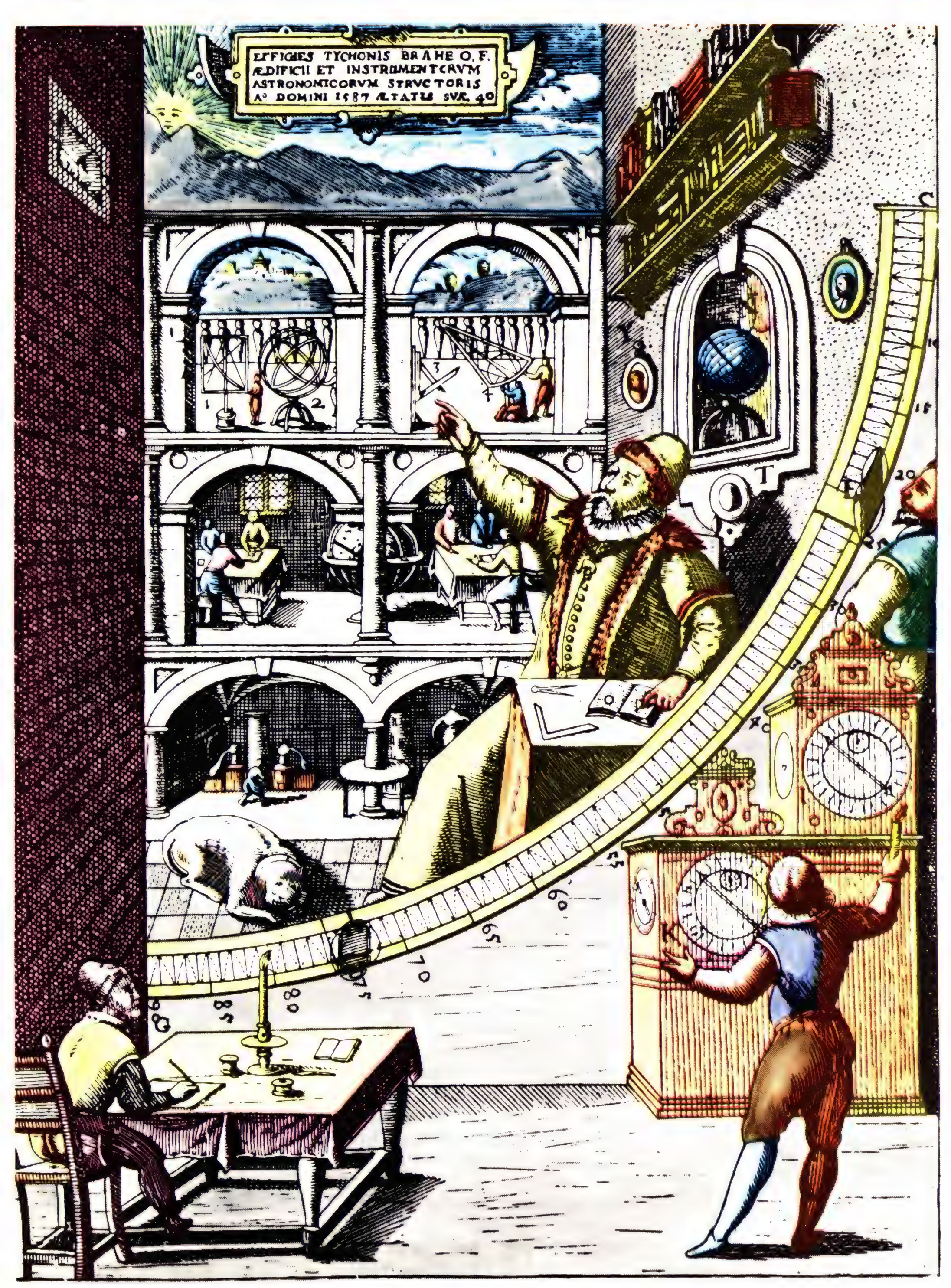
6. Когда экзаменуемый начнет тонуть, никогда не помогайте ему выкарабкиваться. Зевните... и перейдите к следующему вопросу.



7. Задавайте экзаменуемому время от времени вопросы типа: «Разве вы не проходили этого в начальной школе?»



(Продолжение см. на с. 62)



Обсерватория Тихо Браге и астрономические инструменты.

В будущем году в Библиотечке «Квант» выйдет книга одного из постоянных авторов нашего журнала, преподавателя кафедры физики Московского физико-технического института В. Е. Белонучкина «Кеплер, Ньютон и все-все-все».
«Ужасно скучно,— пишет автор в предисловии,— начинать задачу словами «В некоторой системе одна из звезд имеет массу...» Куда приятнее звучит: «Сириус — двойная звезда...» Но загадку Сириуса разгадал не я, а Бессель, не упомянуть его — нехорошо. Да и вся эта история интересна и поучительна. Хотелось рассказать о ней, но много ли можно вместить в условие задачи? А если написать об этом в книжке, место может найтись».
Сегодня мы печатаем одну из первых глав книги. В этой главе рассказывается о предшественниках создателей небесной механики — Кеплера и Ньютона — и разбираются задачи, которые решали астрономы древности.

Гиганты

Кандидат физико-математических наук
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

Гений подобен холму,
возвышающемуся
на равнине.
Козьма Прутков

Общепризнано, что Исаак Ньютон был одним из величайших гениев в истории науки. И вот он-то категорически не согласен с К. Прутковым. «Если я видел немного дальше других,— писал Ньютон,— то потому лишь, что стоял на плечах гигантов.» Кто же эти гиганты? Конечно, Кеплер, конечно, Галилей, Коперник. Ну а еще раньше?

Уже первый известный нам по имени ученый — Фалес Милетский, чья научная деятельность началась на рубеже 7 и 6 веков до н. э., внес свой вклад в историю астрономии. Согласно преданию, он предсказал солнечное затмение 28 мая 584 года до н. э. Впрочем, есть основания предполагать, что он воспользовался методом, разработанным еще в древнем Вавилоне. Метод вавилонян был чисто эмпирическим: многолетние наблюдения позволяли им улавливать закономерности в повторении астрономических явлений. Первым «теоретически» установленным фактом, с признания которого началось построение схемы Вселенной, следует, по-видимому, считать шаровидность Земли.

Две догмы лежали в основании первых научных систем построения мира: очевидная неподвижность Земли и равномерное движение по окружностям вокруг Земли Солнца, Луны, планет. Несправедливость второй догмы была замечена еще древними астрономами, но именно она прожила незыблемо два тысячелетия — вплоть до Кеплера.

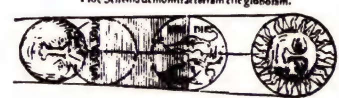
Если и кажется, что светило движется неравномерно и не по окружности, то оно все же движется равномерно по окружности, центр которой движется равномерно по окружности вокруг точки, которая движется равномерно по окружности... и так далее, пока какая-нибудь точка не начинает двигаться равномерно по окружности с центром в Земле. Такого рода схему в законченном виде впервые построил древнегреческий астроном Евдокс в на-

Исторический комментарий

Фалес Милетский (ок. 625 — ок. 547 до н. э.) — древнегреческий философ, родоначальник античной философии.

PRIMA PARS.

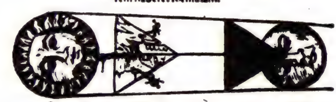
Hoc Schema demonstrat terram esse globosam.



Si terra esset tetragona, vmbra quoq tetragonæ figuræ in eclipsatione lunari appareret.



Si terra esset trigona, vmbra quoq triangularem haberet formulam.



Si terra hexagonæ esset figuræ, eius quoq vmbra in defectu lunari hexagona appareret, quæ tamen rotunda cernitur.



Доказательство шарообразности Земли. (Из руководства по устройству солнечных часов, 1531 г.) Надпись вверху: «Эта схема показывает, что Земля шарообразна». Далее: «Если бы Земля была квадратной, треугольной или шестиугольной, мы увидели бы при лунном затмении тень соответствующей формы».

Евдокс Книдский (ок. 406 — ок. 355 до н. э.) — древнегреческий математик и астроном. Представил движение планет как комбинацию равномерно вращающихся вокруг Земли 27 концентрических сфер.

Аристотель (384—322 до н. э.) — древнегреческий философ и ученый. Сочинения Аристотеля охватывают все отрасли тогдашнего знания. В области астрономии интересы Аристотеля были сосредоточены главным образом на вопросах мироздания. Ему принадлежат также наблюдения небесных явлений, комет и падающих звезд.

Гиппарх (ок. 180—190—125 до н. э.) — древнегреческий астроном, один из основоположников астрономии. Определил расстояние до Луны, продолжительность года, составил каталог 850 звезд, в котором разделил их по блеску на 6 классов.

Клавдий Птолемей (ок. 90 — ок. 160) — древнегреческий астроном, создатель геоцентрической системы мира. Разработал математическую теорию движения планет вокруг неподвижной Земли, позволяющую предвычислять их положения на небе.

Николай Коперник (1473—1543) — польский астроном, создатель гелиоцентрической системы мира. Совершил переворот в естествознании, отказавшись от принятого в течение многих веков учения о центральном положении Земли. Объяснил видимое движение небесных светил вращением Земли вокруг своей оси и обращением планет (в том числе и Земли) вокруг Солнца.

Иоганн Кеплер (1571—1630) — немецкий астроном, один из творцов астрономии нового времени. Открыл законы движения планет (теперь их называют законами Кеплера), на основе которых составил планетные таблицы.



Средневековый астроном определяет расстояние до корабля в море, используя предложенный Фалесом метод триангуляции.

чале 4 века до н. э. Схема Евдокса состояла из 27 окружностей (сфер) и объясняла с достаточной для того времени точностью движение Солнца, Луны и пяти известных тогда планет.

Со временем точность наблюдений росла, росло и число сфер. Ученику Евдокса Калиппу понадобилось уже 33 окружности. Аристотель довел их число до 56. Система окружностей (сфер), усовершенствованная трудами многих астрономов, в первую очередь Гиппарха, доведенная до блеска Птолемеем, чье имя она получила, и освященная авторитетом Аристотеля, была единственно приемлемой системой мира даже для великого революционера в науке Коперника, который «всего лишь» окончательно перенес центр Вселенной с Земли на Солнце. И только Кеплер сумел окончательно отказаться от идеи равномерного движения планет по окружностям.

Как вы, наверное, знаете, на этот отказ Кеплера подвигли восемь минут отклонения Марса от предписанного ему положения. Тихо Браге, результатами наблюдений которого пользовался Кеплер, достиг точности, при которой эти восемь минут уже нельзя было отнести на счет погрешности измерений. Правда, еще за полтора века до Браге такой же, или даже несколько большей, точности достиг великий Улугбек. Но Самарканд далеко от Европы, а мусульманская церковь, жертвой которой пал Улугбек, постаралась вытравить даже память о безбожнике, хотя и был он правителем великого среднеазиатского государства.

Точность измерений Евдокса составляла около 0,5°, Тихо Браге — примерно 2′, Улугбека — порядка 1′. С изобретением телескопа точность измерений резко возросла. Но значит ли это, что результаты древних и средневековых астрономов потеряли для нас всякую ценность? Конечно, нет. «И при железных дорогах лучше сохранять двуколку»,— утверждал К. Прутков. Записи древних — греков, египтян, вавилонян, китайцев, инков — помогают установить долговременные закономерности движения планет, Земли, «неподвижных» звезд. Вот иллюстрация.

Задача 1. *Самый большой в мире телескоп-рефлектор (советский БТА) имеет в качестве объектива зеркало диаметром $D=6$ м. В течение какого промежутка времени надо наблюдать звезду с помощью БТА, чтобы ее скорость можно было определить точнее, чем с привлечением данных Евдокса? А если использовать данные Тихо Браге, Улугбека?*

Чтобы вычислить скорость звезды, надо, как минимум, определить ее положение дважды. С какой точностью можно измерить координаты светил с помощью телескопа, определяется его разрешением, а оно принципиально ограничено дифракционными явлениями. Минимальный угол, который можно измерить, применяя объектив диаметром D, равен примерно λ/D, где λ — длина волны излучения, на которой ведутся наблюдения. Для желтого света, например, $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-7}$ м, а значит, максимальная точность измерений на БТА — примерно 10^{-7} радиана. Дальнейшие вычисления читателю предлагается проделать самому (ответы см. на с. 75).

Борьба против догмы, постулирующей неподвижность Земли, началась в 3 веке до н. э. Имя первого борца — Аристарх Самосский. Хотя еще и Пифагор, и Гераклит считали, что в центре Вселенной находится Солнце, именно Аристарх был первым, кто попытался это аргументировать. Сопоставив вычисленные им относительные размеры Земли и Солнца, он пришел к выводу, что Солнце, значительно превышающее Землю по своим размерам, должно быть центром, вокруг которого обращаются планеты, в том числе и Земля. И это — за восемнадцать веков до Коперника!

Попробуем проследить за вычислениями Аристарха на таком примере.

Задача 2. *Солнце гораздо дальше от Земли, чем Луна. Угловые размеры Луны и Солнца практически совпадают, а значит, тень Луны на Земле — точка. Тень Земли на орбите Луны по диаметру вдвое превышает Луну (правильная цифра — в 2,67 раза). Во сколько раз Земля больше Луны? Вычислите то же соотношение по современным данным.*

Для определения размеров Солнца Аристарх измерил угол между направлениями на Солнце и на Луну в первой и последней ее четверти, т. е. когда освещена ровно половина диска Луны. И тут он крупно ошибся: по его измерениям этот угол отличается от прямого на 3°, а



Модель Солнечной системы Тихо Браге; здесь Солнце обращается вокруг Земли, но остальные планеты обращаются вокруг Солнца.

Тихо Браге (1546—1601) — датский астроном, реформатор практической астрономии. На построенной им обсерватории свыше 20 лет вел определения положений светил с наивысшей для того времени точностью. На основе его наблюдений Марса Кеплер вывел законы движения планет.



Обсерватория Тихо Браге в Ураниборге. С гравюры 1598 г.

Улугбек Мухаммед Тарагай (1394—1449) — среднеазиатский государственный деятель, ученый, просветитель. Построил одну из наиболее значительных обсерваторий средневековья. Составил каталог положений 1018 звезд, определенных с большой точностью.

Пифагор Самосский (6 в. до н. э.) — древнегреческий математик и философ.

Гераклит Эфесский (кон. 6 — нач. 5 вв. до н. э.) — древнегреческий философ-диалектик.

Аристарх Самосский (ок. 320 — ок. 250 до н. э.) — древнегреческий астроном. Первым высказал идею гелиоцентризма: утверждал, что Земля движется вокруг неподвижного Солнца, находящегося в центре сферы неподвижных звезд.

Джованни Доменико Кассини (1625—1712) — первый директор Парижской обсерватории. Открыл вращение Юпитера и Марса, 4 спутника Сатурна и темный промежуток в его кольце.

Эратосфен Киренский (ок. 276—194 до н. э.) — древнегреческий ученый. Работал во многих областях науки. В математике, например, дал известный способ нахождения простых чисел. Занимался хронологией, астрономией (описание созвездий).

Посидоний (ок. 135 — 51 до н. э.) — древнегреческий философ. Сочинения охватывали все области знания и дали завершающую форму античной натурфилософии.

Николай Кузанский (1401—1464) — философ, теолог, ученый. Один из предшественников космологии Коперника и опытного естествознания.

Галилео Галилей (1564—1642) — итальянский ученый, один из основателей точного естествознания. Его научная деятельность имела огромное значение для победы гелиоцентрической системы мира.



Телескоп Галилея.



«Скептик, или Пилигрим на краю Земли» — гравюра на дереве, выполненная в 19 в. Камилем Фламмарионом.

правильная цифра — на 8,6′. Дело в том, что эта величина вообще трудно поддается измерению, в частности из-за явления «пепельного света» — Луна переотражает на Землю солнечный свет, рассеянный в ее сторону Землей. Вот почему ответ Аристарха и наш сильно разойдутся, когда мы решим следующую задачу.

З а д а ч а 3. *Определите отношение размеров Солнца и Луны, используя данные Аристарха. Что получится, если подставить современные цифры?*

Подсказка: угол между прямыми Земля — Луна и Луна — Солнце Аристарх считал в точности прямым.

Результат, полученный Аристархом относительно размеров Земли и Солнца, не вызывал сомнений свыше двух тысяч лет. Лишь в середине 17 века основатель Парижской обсерватории Кассини произвел прямые измерения расстояния от Земли до Солнца и «увеличил» размеры Солнца.

А размеры Земли с неплохой точностью измерил еще в 3 веке до н. э. Эратосфен Киренский (помните «решето Эратосфена» для выделения простых чисел?). Эратосфен прослышал, что в Сиене (ныне Асуан) раз в год предметы не отбрасывают тени. Он поехал в Сиену и проверил этот факт. Таким образом Эратосфен убедился, что в день летнего солнцестояния в Сиене Солнце находится в зените. В Александрии, где жил Эратосфен, в день солнцестояния Солнце на 1/50 окружности не доходило до зенита. От Александрии до Сиены 5000 стадиев (греческая мера длины), и города расположены почти на одном меридиане. Перед Эратосфеном встала нетрудная задача, которая предлагается и вам.

З а д а ч а 4. *По приведенным выше данным определите длину окружности земного шара.*

В стадиях ответ получается сразу — 250 000. А как это выглядит в привычных километрах? Кое-кто хочет польстить Эратосфену и для величины стадия выбирает цифру 157 м. Тогда получается «астрономическая» точность — ошибка Эра-

тосфена меньше 2 %. Правда, смущают два обстоятельства. Во-первых, Сиена находится не совсем на тропике, во-вторых, странно, что спустя полтора столетия Посидоний ошибся заметно больше — у него получилось 240 000 стадиев, т. е. за полтора века точность снизилась в три с лишним раза. Все же наиболее вероятное значение величины стадия — около 190 метров.

Однако вернемся к Аристарху. Первым высказал он идею гелиоцентризма, однако не удалось ему опровергнуть очевидность первой догмы, и почти на два тысячелетия Земля застыла в неподвижности. Но росла точность измерений, все труднее было согласовывать движение планет со схемой Птолемея.

Нельзя не отметить вклад в развенчание геоцентрической системы мира кардинала католической церкви Николая Кузанского. Его аргументация была вполне теологической: поскольку Бог вездесущ, любая точка Вселенной равно близка к нему (или равно удалена от него), а значит, равно может претендовать на право считаться центром Мира. Но не надо думать, что заслуги этого ученого сводятся только к этой фразе.

Роджер Бэкон в 13 веке, Николай Кузанский в 15, Фрэнсис Бэкон в начале 17 века заложили основы современной научной методологии, главный тезис которой можно выразить словами «опыт — критерий истины». У некоторых может возникнуть вопрос: не маловато ли — за четыре века один тезис? Давайте вспомним, что более тысячи лет критерием истины считалось согласие с Библией и Аристотелем. Ведь еще в 17 веке нетрудно было угодить в лапы инквизиции, просто пересчитав лапки паука. Аристотель написал, что у паука шесть ног, а попробуйте посчитать — непременно получите восемь (если, конечно, паук не инвалид), и это будет великим грехом. Но смертельный удар геоцентрической системе нанес лишь Николай Коперник.

В самом начале 17 века был создан предсказанный еще Роджером Бэконом и сконструированный Леонардо да Винчи первый телескоп. 7 января 1610 года Галилей направил его на Юпитер и тут же обнаружил, что у крупнейшей планеты есть четыре спутника. Сейчас этих спутников известно больше полутора десятков, но четыре самых крупных так и называются по имени первооткрывателя — Галилеевы спутники Юпитера. К 1670 году Кассини получил реалистическую оценку радиуса земной орбиты. Через 5 лет Рёмер, используя спутники Юпитера и данные Кассини, осуществил мечту Галилея — измерил скорость света. Попробуем и мы сделать то же самое, но несколько иным путем.

Задача 5. *Промежуток времени между двумя последовательными затмениями спутника Юпитера Ио в течение года изменяется от минимального значения 42 ч 28 мин 21 с до максимального — 42 ч 28 мин 51 с. Определите по этим данным скорость света.*

Так как орбита Юпитера гораздо больше земной орбиты, а скорость Юпитера намного меньше скорости Земли, можно считать, что в течение года взаимное расположение Земли и Юпитера практически не меняется. Кажущиеся изменения продолжительности периода обращения Ио связаны только с изменением направления скорости Земли. Эта скорость по величине неизменна и равна 29,8 км/с.

Накапливались данные, повышалась точность, выводились эмпирические законы. Пришла пора все это объяснить. Но это уже выходит за рамки данной главы.

Роджер Бэкон (ок. 1214—1292) — английский философ и естествоиспытатель. Занимался оптикой и астрономией.

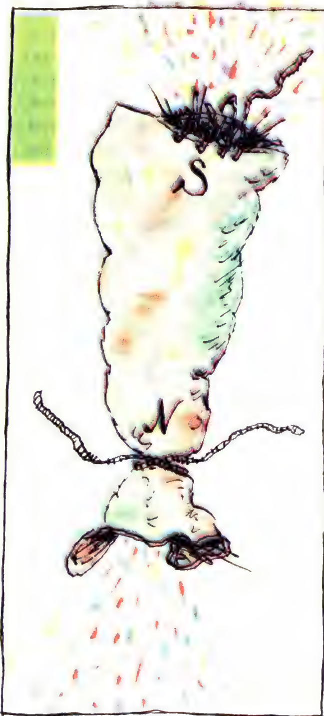
Фрэнсис Бэкон (1561—1626) — английский философ, родоначальник английского материализма. Сформулировал общие принципы экспериментального исследования.

Оле Рёмер (1644—1710) — датский астроном. По наблюдениям спутников Юпитера впервые определил скорость света.



Гравюра, на которой изображен Рёмер во время наблюдений.







Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Почему не скользит мешок?» предназначена восьмиклассникам, заметка «Полярные сияния» — девятиклассникам, «О законах Ньютона и «свободе воли» — десятиклассникам.

Почему не скользит мешок?

На одном из уроков учитель кладет на стол спичечный коробок, на коробок ставит стакан с водой (рис. 1).

— Как вытащить коробок, не дотрагиваясь до стакана? Потянуть? Нет, стакан поедет за коробком. А теперь смотрите.

Учитель берет в руки тяжелую линейку, отводит ее в сторону и с размаху ударяет по коробку. Спички улетают в дальний угол, зато стакан стоит на столе, почти не сместившись от удара!

Почему же стакан не сдвинулся с места? Во избежание недоразумений напомним, что учитель наносит удар не по стакану, а по коробку. На стакан же в горизонтальном направлении действует только сила трения со стороны коробка $F_{тр}=\mu m_{ст}g$. Конечно, и с помощью такой силы можно сообщить стакану заметную скорость, перемещая коробок по столу с небольшим ускорением (подумайте, в каких пределах должно лежать это

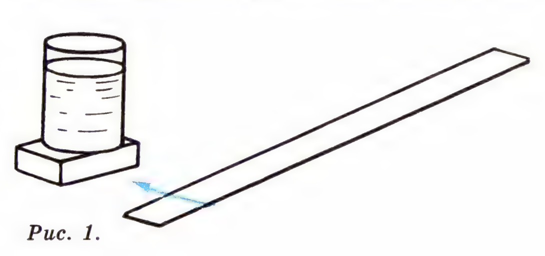


Рис. 1.

ускорение, чтобы стакан не соскользнул). Дело не в величине силы, а в том, что при резком ударе линейкой коробок сразу вылетает, и сила трения действует очень короткое время. Такое короткое, что эта сила не успевает сообщить стакану сколь-нибудь заметный импульс $\Delta P_x = F_{тр}\Delta t$.

На этом примере видно, что при анализе сил, действующих на тело или на систему тел, надо учитывать также и время их действия. Например, при разрыве снаряда на него действует внешняя сила — сила тяжести. Несмотря на это, можно считать, что импульс системы сохраняется (импульс снаряда равен суммарному импульсу осколков), так как изменение импульса системы за очень малое время взрыва ничтожно мало́.

— Нет,— может возразить наблюдательный ученик,— тут явно что-то не в порядке! Посмотрите на жесткий мячик, который отскакивает от пола (рис. 2). Время удара мало́, а изменение импульса имеет вполне заметную величину:

$$\Delta P_y = mv - (-mv) = 2mv.$$

В чем же дело?

Ученик, безусловно, прав. Совсем не всегда действие силы становится пренебрежимо малым при малом времени ее действия.*) Это верно только в том случае, когда величина силы фиксирована, как, например, в случае силы тяжести. Совсем по-другому обстоит дело с силой реакции опоры, которая действует на мячик при его ударе о плоскость. Если мы добьемся уменьшения времени удара, к примеру, в 10 раз (за счет увеличения жесткости материала шарика и плоскости), то в десять раз возрастет среднее значение силы реакции, а изменение импульса шарика все равно будет равно $2mv$. Такие силы мы будем условно называть ударными. Их действие может оказаться существенным при любом, сколь угодно коротком взаимодействии.

Рассмотрим, например, пушку, производящую выстрел в тот момент, когда она соскальзывает с гладкой наклонной плоскости (рис. 3). Можно ли для определения скорости пушки после выстрела применять закон сохранения импульса? Можно, но для начала нужно отыскать направление, в проекции на которое внешние силы обращаются в ноль, и лишь потом записать закон сохранения импульса. Но такого направления в нашем случае нет! На систему действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Выбирая горизонтальную ось, мы избавляемся от силы тяжести (ее проекция равна нулю), но остается сила $\vec{N}$. Если же выбрать ось, направленную вдоль плоскости, то остается, наоборот, сила тяжести. Что же предпочтительнее? Конечно же, надо избавляться от силы реакции. Сила тяжести нам не страшна — ее действие за время выстрела очень мало́. Напротив, сила реакции — ударная сила, ее действие может привести к существенному изменению импульса. Но так как она перпендикулярна к наклонной плоскости, то импульс системы пушка — снаряд в проекции на направление движения пушки за время выстрела меняться не будет.

*) Действие силы можно измерять тем импульсом, который она сообщила бы телу, действуя в одиночку. В случае постоянной силы эта величина (ее называют импульсом силы) равна $\vec{F}\Delta t$, в случае переменной — $\Sigma \vec{F}_i \Delta t_i$. Иногда вводят среднюю силу, определяя ее равенством $\vec{F}_{ср}\Delta t = \Sigma \vec{F}_i \Delta t_i$.

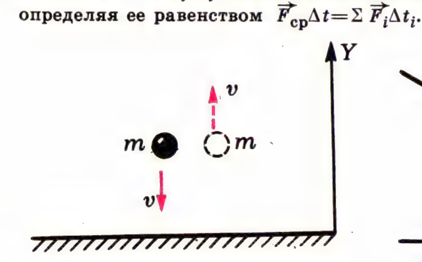


Рис. 2.

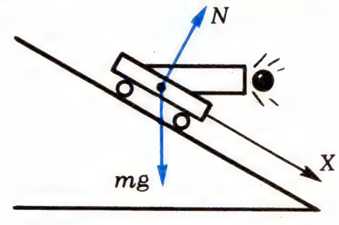
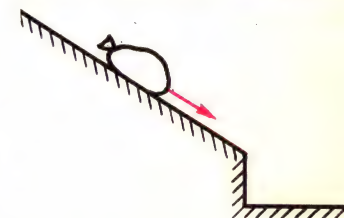


Рис. 3.


Рис. 4.

Итак, в кратковременных процессах (соударения, взрывы) только ударные внешние силы изменяют импульс тела или системы тел, действием же сил фиксированной величины можно пренебречь.

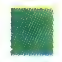
— Понятно? — спрашивает учитель.— Ну, тогда рассмотрим такой пример. Пусть мешок соскальзывает по наклонному желобу и падает на пол (рис. 4). Что с ним будет? Остановится ли он сразу или сначала немного проскользнет по инерции?

— Ну, здесь все ясно,— говорит ученик,— в горизонтальном направлении на него действует сила трения, время удара мало́, и, так же, как в примере со стаканом, горизонтальный импульс мешка при ударе не изменится. Вертикальный же импульс обратится в ноль за счет ударной силы реакции. Вывод: после удара мешок сначала обязательно будет двигаться, и только потом он остановится.

Нет, такое рассуждение неверно, и это чувствует каждый, кто видел, как мешок падает на пол. Дело в том, что сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, равная μN, является ударной в той же мере, что и сама сила реакции $\vec{N}$. В примере со стаканом сила реакции имела фиксированное значение, равное $m_{ст}g$, и поэтому действие силы трения было ничтожно малым. В случае падения мешка с наклонной плоскости силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ — ударные, и изменением горизонтального импульса за время удара нельзя пренебречь. Остановится ли при этом мешок, зависит от величины коэффициента трения μ — при достаточно большом его значении скорость мешка за время удара может полностью исчезнуть (попробуйте сами посчитать, какой коэффициент трения нужен для этого).

Аналогичные рассуждения позволяют понять, например, почему гимнаст при прыжке со снаряда может приземлиться на ноги и застыть на месте (высший спортивный класс!). Подумайте, как объяснить, что при упругом ударе о шероховатый пол тело может отскочить не под таким углом, под каким падало, каков механизм «крученого» удара. Но главное — постарайтесь сами подметить и придумать новые примеры и задачи на ударные и неударные силы.

А. И. Черноуцан



Полярные сияния

Так называют разноцветные, кажущиеся призрачными «огни», которые можно наблюдать на крайнем севере — в районах, прилегающих к Арктике, и на крайнем юге — в Антарктике.

Северные сияния (в литературе чаще встречается именно это название) известны очень давно. О них упоминали античные авторы, несколько описаний северного сияния сделали средневековые летописцы. Северное сияние, наблюдавшееся в Англии в 1716 году, было описано Галлеем. Ломоносов, проведший детство и юность на севере и часто наблюдавший северные сияния (русские поморы называли их сполохами, позорями), одним из первых высказал предположение об электрической природе этого явления.

Что видит наблюдатель? Полярные сияния (и северные, и южные) отличаются большим разнообразием. Это могут быть однородные зелено-желтые полосы или дуги с резкой нижней границей и размытой верхней. Высота нижней границы обычно около 100 км, верхней — около 1000 км. Это могут быть дуги или полосы, составленные из своеобразных лучей, перпендикулярных земной поверхности. Можно увидеть и пульсирующие полосы или дуги. Сильное впечатление производят так называемые пылающие полярные сияния, имеющие вид движущихся вверх светящихся волн. Это напоминает картину угасающего огня, раздуваемого порывистым ветром.

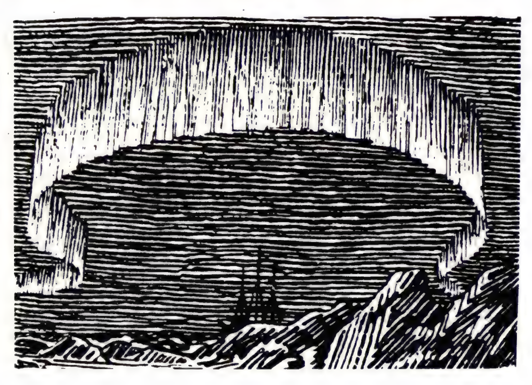
Зеленый цвет с примесью желтого — это преобладающие цвета. Зна-

чительную роль играет также красный цвет, в меньшей степени — голубой и фиолетовый.

Где видны полярные сияния? Полярные сияния, в частности северные, можно наблюдать не только вблизи полюса. Их можно увидеть и на Черноморском побережье, и даже в Риме. Но по мере приближения к полюсам частота полярных сияний резко увеличивается.

Многолетние наблюдения позволили нанести на карту линии, соединяющие места с одинаковой частотой полярных сияний (такие линии называются изохазмами). По ним видно, например, что на побережье Черного моря сияния можно наблюдать один раз (одну ночь) за 10 лет, на севере Англии или на Кольском полуострове — 100 ночей в году, а на большей части побережья Северного Ледовитого океана — практически каждую ночь. Мы здесь выражаем частоту полярных сияний числом ночей в год. Это не значит, что полярные сияния наблюдаются только ночью. Они возникают и в дневное время, но на фоне светлого неба сравнительно слабое свечение полярных сияний наблюдать много труднее.

Как и почему возникают полярные сияния? Ломоносов не напрасно приписывал полярным сияниям электрическую природу. Но, как теперь выяснилось, в сложных процессах, приводящих к полярным сияниям, не менее важную роль играют и магнитные явления. И это не случайно.



Северное сияние (с гравюры на дереве, конец 19 в.).

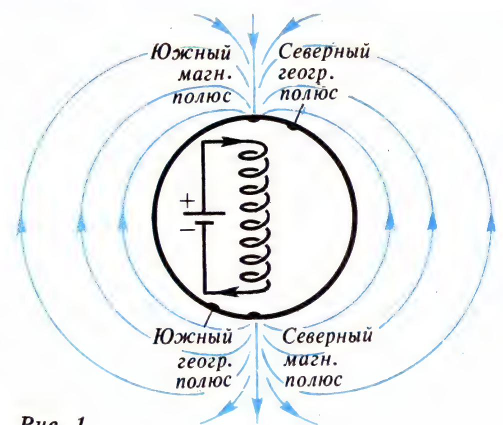


Рис. 1.

Земной шар — это гигантский природный магнит, и поэтому наша Земля окружена магнитным полем. Оно, это поле, похоже на магнитное поле, созданное намагниченным стержнем или соленоидом, по которому течет постоянный ток. На рисунке 1 показана картина линий индукции магнитного поля Земли. Изображенного на рисунке соленоида и питающего его источника тока внутри Земли, конечно, нет, но электрические токи, «виновники» магнитного поля Земли, в ней действительно существуют (в жидкой части ядра Земли). Из рисунка видно, что северный и южный магнитные полюса не совпадают с географическими полюсами, а отклонены от них примерно на 11°. Магнитное поле Земли простирается до расстояния примерно в три земных радиуса (от ее центра). Значение магнитной индукции поля невелико — всего около $5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Вторым, не менее важным «действующим лицом» в рассматриваемом нами процессе является Солнце. Кроме видимого и невидимого света, Солнце (его корона) постоянно испускает еще и плазму, состоящую из быстрых протонов и электронов. Такой поток частиц — солнечный ветер — «дует» и на Землю.

Этих двух фактов достаточно для того, чтобы понять явление полярных сияний.

Солнечный ветер и магнитное поле Земли. Магнитное поле Земли неоднородное: у полюсов значение

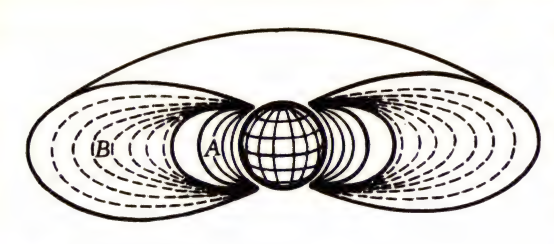


Рис. 2.

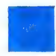
магнитной индукции почти вдвое больше, чем у экватора. Неоднородность поля делает его, как теперь хорошо известно, своеобразной ловушкой для попадающих в него заряженных частиц. Попав в такое поле, частица движется вдоль линий индукции (по спирали, охватывающей их), пока она не дойдет до места, где линии индукции сгущаются, т. е. до района магнитного полюса. Здесь частица как бы отражается, движется к другому полюсу, чтобы в свою очередь отразиться и от него. Частицы оказываются запертыми, как говорят, в магнитной «бутылке» с двумя «пробками», роль которых играют места сгущения линий индукции поля у полюсов. Земля оказывается окруженной так называемым радиационным поясом, охватывающим ее со всех сторон, кроме приполярных областей (это схематически показано на рисунке 2). Радиационный пояс условно разделяют на две части — внутренний пояс (A) и внешний (B). Нижняя граница внутреннего пояса находится на высоте около 500 км, а его «толщина» — несколько тыс. км. Внешний пояс находится на высоте 10—15 тыс. км.

Любопытно, что радиационный пояс Земли к полярным сияниям имеет самое прямое отношение. Дело в том, что особые свойства плазмы (радиационный пояс заполнен плазмой) и некоторые происходящие в ней процессы приводят к тому, что магнитные «пробки» оказываются не вполне плотными, и какое-то число частиц «вываливается» из «бутылки». А затем происходит следующее. Быстрые заряженные частицы, «высыпавшиеся» из «бутылки», сталкиваются с атомами или молекулами воздуха (азота, кислорода) и возбуждают их, т. е. переводят их в состояние с большей энергией. Вслед затем молекулы (атомы) возвращаются в исходные состояния, избавляясь от избыточной энергии излучением соответствующих порций (квантов) света. Это и есть свет полярных сияний.

Анализ состава (спектра) этого света показал, что зеленый свет (и частично красный) возникает при возбуждении атомов кислорода. Красное, темнокрасное, слабые голубое и фиолетовое излучения связаны с возбуждением молекул азота. Может показаться странным, что мы говорим здесь об атомах, а не о молекулах, кислорода. Но оказывается, что в высоких слоях атмосферы молекулы кислорода под действием ультрафиолетовых лучей Солнца расщепляются на атомы.

Полярные сияния интенсивно изучаются и в лабораториях на Земле, и с помощью искусственных спутников Земли в космосе. Эти исследования дают важные сведения о магнитном поле Земли, о различных физических процессах в околоземном космическом пространстве.

А. К. Кикоин



О законах Ньютона и «свободе воли»

Как вы, безусловно, знаете, значение законов Ньютона состоит в том, что они позволяют решать основную задачу механики. Что это означает? Всегда ли это верно?

Вспомним сначала, в чем заключается основная задача механики. Решить такую задачу — значит определить положение тела в любой момент времени, зная начальные условия (скорость и координаты тела в начальный момент времени) и действующие на тело силы.

В простых случаях, например, когда силы постоянны, основная задача механики разделяется на две под-

задачи: в одной решаются уравнения динамики и находится ускорение тела; в другой, кинематической подзадаче, по ускорению и начальным условиям рассчитывается движение тела в любой момент времени.*) В более сложных случаях, например, когда ускорение тела меняется со временем, эти две подзадачи перемешиваются, а расчет поручают компьютеру (хотя многие задачи не по зубам и суперсовременным ЭВМ). Но не в этом дело. Важно, что основная задача механики *в принципе* разрешима, если ускорения взаимодействующих тел в какой-то момент времени однозначно зависят от их координат и скоростей в тот же момент времени (т. е. не зависят от «истории» системы — от того, что происходило с телами до этого).

Таким образом, мы видим, что законы Ньютона представляют собой мощный и достаточно универсальный инструмент исследования. После открытия законов Ньютона область их применения непрерывно расширялась. Триумфальное шествие классической механики продолжалось очень долго, почти 150 лет. К началу XIX века физики почти поверили в ее непогрешимость. И не только в непогрешимость, но и во всемогущество. Возникло убеждение, что механика способна полностью объяснить устройство мира, что все в мире может быть в конечном счете сведено к движению взаимодействующих частиц; такие воззрения назвали механистическими.

Надежда на чисто научное объяснение мира весьма воодушевляла мыслителей-материалистов, особенно французских просветителей. Однако многим из них не давала покоя философская проблема, которая возникла вместе с механицизмом, но обсуждается и по сей день. Суть ее вот в чем. Если мир — механическая система, то для него можно решить основную задачу механики. Иными словами, зная про мир все в какой-то момент времени, можно в принципе рассчитать дальнейший ход событий, а также восстановить все события прошлого. Неважно, что не в силах человеческих произвести такой расчет — пусть для этого существует воображаемый «сверхум», говорил французский мыслитель Лаплас; важно, что все в мире полностью предопределено и не может быть изменено никаким образом. Нам только кажется, что у нас есть свобода воли и свобода выбора. На самом деле все наши мысли и поступки полностью предопределены, и «сверхум» знает, что будет с нами, нашими детьми, да и со всем миром в любой момент времени. Это философское учение о взаимосвязи и взаимообусловленности явлений материального и духовного мира называется лапласовским детерминизмом.

Конечно, ум человеческий не мог смириться с отсутствием свободы и искал выход из тупика. В первую очередь «под подозрение» попали дальнодействующие силы, например силы всемирного тяготения или кулоновские силы. В самом деле, в таких силах есть что-то сверхъестественное — мы чуть-чуть сдвигаем одну частицу, а другая, за сто километров, уже знает об этом и ускоряется чуть-чуть по-другому! Однако никакого отступления от этого правила обнаружить не удавалось, и физики, скрепя сердце, принимали эти силы такими, как они есть. Так продолжалось до открытий Максвелла и Эйнштейна.

В 60-е годы XIX века Максвелл построил теорию электромагнитного поля — новой материальной субстанции, через посредство которой осуществляются электрические и магнитные взаимодействия. В работах Максвелла поле отделилось от вещества и обрело независимость в виде электромагнитных волн (в форме радиоволн, света, рентгеновского излучения и т. д.). Скорость этих волн в вакууме очень большая — 300 000 км/с. Именно с такой скоростью (а не мгновенно!) передается информация о смещении одного из взаимодействующих зарядов другому. Чувствуете, что означает такое «запаздывание»? Сила,

*) Подробнее об этом можно прочитать в заметках «Как решается основная задача механики» («Квант», 1984, № 2, с. 24) и «Основная задача кинематики» («Квант», 1988, № 9, с. 58).

действующая на заряд в некоторый момент времени, определяется теперь не тем, где находятся и как движутся другие заряды *в тот же момент времени*, а тем, что с ними происходило *в предшествующие моменты*. В такой ситуации мы уже не сможем, как раньше, решить «основную задачу механики».

В 1905 году Эйнштейн показал, что такими же свойствами должны обладать любые взаимодействия, так как никакой сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света. (Стоит отметить, что законы Ньютона совсем не потеряли своего значения. Они прекрасно работают, когда скорости частиц малы по сравнению со скоростью света — в этом случае эффекты запаздывания несущественны.)

Итак, вопреки взглядам механицистов, мир оказался заполненным не только движущимися частицами, но и вполне материальными полями. Картина мира сильно усложнилась, его развитие уже не описывается решением основной задачи механики, но... свободу воли это еще не спасает. Все равно все можно предсказать — только теперь надо заложить в «сверхум» начальную информацию не только о частицах, но и о полях (и заставить «сверхум» решать гораздо более сложные уравнения, которым эти поля подчиняются). Как же быть?

Помощь подоспела с другой стороны — от физиков, изучавших устройство атомов. Оказалось, что в жизни атомов действуют законы, кардинально отличающиеся от законов классической физики. Для описания свойств микромира была создана специальная наука — квантовая механика. Отметим только одну важную черту квантовых процессов — в них отсутствует предопределенность! Во многих случаях принципиально нельзя предсказать, какие варианты событий должны реализоваться, можно только рассчитать их вероятность. Впрочем, даже квантовая механика не приводит к окончательному решению вопроса о свободе воли.

А. И. Черноуцан

„Квант" улыбается

Советы экзаменатору

(Начало см. на с. 49)

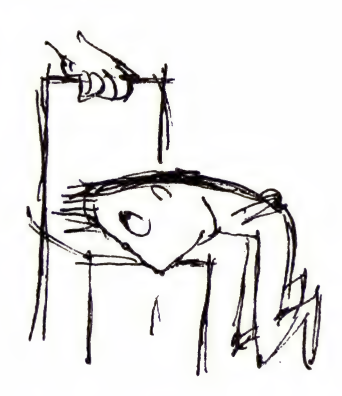


8. Наденьте темные очки. Непроницаемость нервирует.

9. Не позволяйте задавать экзаменуемому выясняющие вопросы и никогда не повторяйте собственные разъяснения и утверждения.



10. Заканчивая экзамен, скажите экзаменуемому: «Ждите за дверью. Мы вас вызовем».



Из книги «Физики продолжают шутить» (М.: Мир, 1968)

импульсов и одновременно измерялась амплитуда ионного сигнала на экране осциллографа. Результат приведен на рисунке 5 в виде зависимости десятичного логарифма амплитуды A сигнала от десятичного логарифма интенсивности I излучения. Легко сообразить, что в таких координатах степенной закон изображается прямой линией с углом наклона, определяющим показатель степени. В эксперименте наблюдался наклон, соответствующий $K=7$. Это означало, что вероятность ионизации связана с интенсивностью излучения степенным соотношением вида $w \sim A_i \sim I^7$, и бесспорно доказывало, что наблюдается семиквантовый процесс ионизации.

Таким образом, в 1965 году впервые экспериментально наблюдался многоквантовый процесс ионизации атома. Примерно в то же время впервые наблюдались и другие многоквантовые процессы — двухквантовое возбуждение атома, двухквантовый переход в кристалле, преобразование двух квантов в один квант удвоенной частоты. Наконец, еще через несколько лет удалось наблюдать многоквантовый внешний фотоэффект из поверхности металла.

Перечисленные эксперименты дали начало лавине работ по наблюдению, исследованию и применению многоквантовых процессов в различных средах — в атомарных и молекулярных газах, в жидкостях, в кристаллах.

Заключение

Тот факт, что процесс многоквантовой ионизации обуславливает нелинейное поглощение видимого света, носит фундаментальный характер и играет большую роль в практике. Возникновение нелинейного поглощения качественно изменяет наши представления о самых обычных прозрачных средах — воздухе, стекле, воде. Подобные среды прозрачны лишь при малой интенсивности видимого света; при большой интенсивности прозрачность исчезает — среды становятся поглощающими. Таким образом, нелинейное поглощение определяет ту предельную интенсивность, при которой лазерное излучение проходит через различные среды без потерь. Это важно и в случае распространения лазерного излучения от лазера до объекта воздействия через воздух или стеклянные детали — призмы, линзы, и в активной среде самого лазера. Особенно важным является то обстоятельство, что вероятность многоквантовой ионизации нелинейно, т. е. весьма резко, зависит от интенсивности излучения.

Интересно отметить еще один важный момент. В процессе развития физики взаимодействия света с веществом основные закономерности, установленные еще Эйнштейном и Бором, не изменились, а внутренне обогатились. Исходные соотношения Эйнштейна и Бора сейчас следует рассматривать как законы, справедливые в предельном случае — когда можно пренебречь многоквантовыми переходами по сравнению с одноквантовыми, т. е. в случае малой интенсивности возбуждающего света.

От редакции. *Издательство «Наука» выпустило в этом году книгу Н. Б. Делоне «Взаимодействие лазерного излучения с веществом». Книгу составляют лекции, прочитанные автором для студентов физических специальностей. Читатель, заинтересовавшийся этой темой, сможет найти в книге дополнительный материал (см., например, лекцию 4 — «Многофотонное поглощение», лекцию 5 — «Нелинейная ионизация»).*



Задачи

М1161—М1165, Ф1168—Ф1172

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1161» или «Ф1168». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1161. В бильярдном треугольнике вплотную помещается 10 шаров (рис. 1). Докажите, что если в нем поместить 9 шаров, то обязательно останется место для десятого (т. е. центры 9 шаров расположатся по треугольной сетке).

Н. П. Долбилин

М1162. Найдите все решения в целых числах (x, y) уравнения

$$x^3-13xy+y^3=13.$$

Д. В. Фомин

М1163. Черепаха вышла из точки A и пришла в точку B, двигаясь по произвольной траектории с произвольной скоростью. Вслед за ней из точки A вышла вторая черепаха, которая в каждый момент времени двигалась в направлении первой (с произвольной скоростью) и в конце концов также пришла в точку B. Докажите, что путь, пройденный второй черепахой (к моменту прихода обеих в B) не превосходит пути первой.

А. Х. Шень

М1164. Натуральное число n называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, меньших n (например: $28=1+2+4+7+14$). Докажите, что нечетное совершенное число (если такое существует) не может одновременно делиться на 3, на 5 и на 7.

В. В. Шабунин

М1165. Докажите, что квадрат со стороной n (n — натуральное число), расположенный произвольным образом на листе клетчатой бумаги с клетками 1×1, покрывает не более $(n+1)^2$ узлов сетки.

Б. Д. Котляр

Ф1168. Оцените максимальную скорость лунохода — работающего на Луне самоходного аппарата, управляемого с Земли.

В. И. Шелест

Ф1169. Тонарм проигрывателя представляет собой легкий прямой стержень длиной L (рис. 2), на одном конце которого (в точке B) закреплен звукосниматель с иглой, а другой конец закреплен в шарнире, который может без трения вращаться относительно вертикальной оси A, проходящей на расстоянии R $(R>L)$ от оси вращения O диска проигрывателя. Игла ставится на ровную однородную поверхность равномерно вращающегося диска. Найти установившийся угол α между тонармом и линией AO.

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

Ф1170. Оценки массы Галактики, полученные различными способами, дают отличающиеся результаты. Так, согласно визуальным оценкам, в пределах расстояния

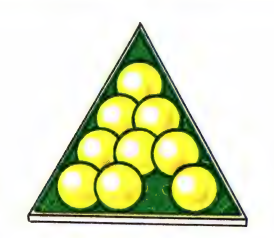


Рис. 1.

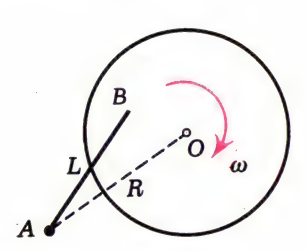


Рис. 2.

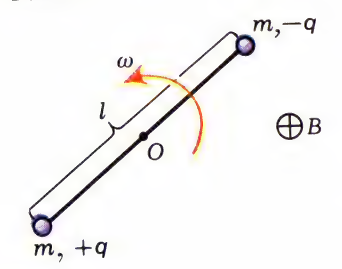


Рис. 3.

$R=3\cdot10^9\ R_0$ (R_0 — радиус орбиты Земли) от центра Галактики сосредоточена масса $M_1=1{,}5\cdot10^{11}\ M_0$ (M_0 — масса Солнца). Между тем, период обращения звезд, находящихся на указанном расстоянии от центра Галактики, составляет $T=3{,}75\cdot10^8$ лет. Определить «скрытую массу» Галактики, т. е. массу невидимых объектов внутри сферы радиусом R. При расчете движения звезд массу Галактики можно считать сосредоточенной в ее центре.

В. Е. Белонучкин

Ф1171. Электрический диполь — две частицы с одинаковыми массами m и зарядами $+q$ и $-q$, закрепленные на концах жесткого невесомого стержня длиной l,— вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр O диполя (рис. 3). В некоторый момент включают постоянное магнитное поле с индукцией B, направленной вертикально. Опишите установившееся движение диполя.

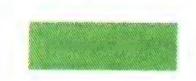
С. Здравкович (СФРЮ)

Ф1172. Внутренняя поверхность сферы покрыта диффузным отражателем с коэффициентом отражения $r=0{,}9$. Угловое распределение света, отраженного диффузным отражателем, описывается законом Ламберта:

$$\Delta N=\frac{N}{\pi}\cdot\cos\theta\cdot\Delta\Omega,$$

где N — полное число отраженных фотонов, ΔN — число отраженных фотонов в малом телесном угле $\Delta\Omega$, составляющем угол θ с нормалью к отражающей площадке. В центре сферы происходит вспышка точечного источника света. Какая доля фотонов выйдет через очень маленькое отверстие, имеющееся в сфере?

С. А. Хорозов



Решения задач

М1136—М1140, Ф1148—Ф1152

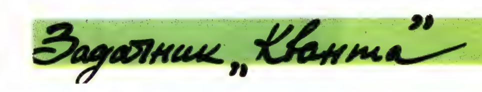
М1136*. *Докажите для неотрицательных чисел A, M, S неравенство*

$$3+(A+M+S)+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{M}+\frac{1}{S}\right)+\left(\frac{A}{M}+\frac{M}{S}+\frac{S}{A}\right)\geqslant\frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1}.$$

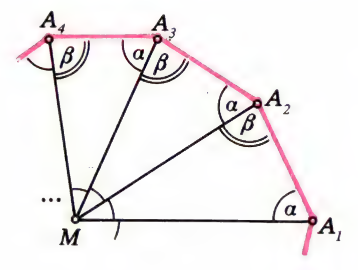
Доказательство сводится к весьма искусственному (но и искусному!) тождественному преобразованию. Умножив разность левой и правой частей неравенства на их общий знаменатель $AMS(AMS+1)$ и произведя перегруппировки слагаемых, получим

$$A^2M^2S^2(A+M+S)-2AMS(AM+MS+SA)+(AM^2+MS^2+SA^2)+AMS(AM^2+MS^2+SA^2)-2AMS(A+M+S)+(AM+MA+AS)=$$
$$=AM(M+1)(SA-1)^2+MS(S+1)(AM-1)^2+SA(A+1)(MS-1)^2\geqslant0,$$

причем равенство, очевидно, достигается только при $A=M=S=1$. Это решение сообщил автору задачи крупный специалист по циклическим неравенствам профессор П. Х. Дигнанда из Сингапура.



М1137. *В выпуклом n-угольнике все углы равны и из некоторой точки, расположенной внутри n-угольника, все его стороны видны под равными углами. Докажите, что этот n-угольник правильный.*



Пусть в n-угольнике $A_1A_2...A_n$ (см. рисунок) все углы равны, т. е. каждый из них равен $180°(n-2)/n$, и точка M такова, что

$$\angle A_1MA_2 = \angle A_2MA_3 = ... = \angle A_nMA_1 = 360°/n.$$

Тогда все треугольники A_1MA_2, A_2MA_3, ..., A_nMA_1 подобны: если $\angle MA_1A_2 = \alpha$, $\angle A_1A_2M = \beta = 180° - 360°/n - \alpha$, $\angle MA_2A_3 = 180°(n-2)/n - \beta = \alpha$, $\angle A_2A_3M = 180° - 360°/n - \alpha = \beta$ и т. д., поэтому

$$\frac{MA_1}{MA_2} = \frac{MA_2}{MA_3} = ... = \frac{MA_{n-1}}{MA_n} = \frac{MA_n}{MA_1} = k.$$

Перемножив эти отношения, получаем, что $k^n = 1$, т. е. $k = 1$. (Можно рассуждать и «от противного»: если $k < 1$, то $MA_1 < MA_2 < ... < MA_n < MA_1$; если $k > 1$, то $MA_1 > MA_2 > ... > MA_n > MA_1$ — противоречие.) Отсюда следует, что $\alpha = \beta$, и M — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$.

К. П. Кохась

М1138*. *Докажите, что для любого натурального n между числами n^2 и $n^2+n+3\sqrt{n}$ найдутся три натуральных числа, произведение двух их которых делится на третье.*

Для $n=1$: между 1 и 5 — числа 2, 3, 4;
для $n=2$: между 4 и $6+3\sqrt{2}$ — числа 6, 8, 9 (или 5, 8, 10);
для $n=10$: $x=2$ и
$a=8\cdot 13=104$,
$b=9\cdot 12=108$,
$c=9\cdot 13=117$.

Чтобы оценить нетривиальность этой задачи, возьмем $n=10$: попробуйте быстро найти три числа между 100 и $[110+3\sqrt{10}]=119$, одно из которых делит произведение двух других! (Одна такая тройка указана на полях.)

Заметим, что для $n=1$ и $n=2$ утверждение задачи очевидно. Будем для каждого целого $n>2$ искать нужные три числа в виде

$$a=(n-x)(n+x+1)=n^2+n-x^2-x,$$
$$b=(n-x+1)(n+x)=n^2+n-x^2+x,$$
$$c=(n-x+1)(n+x+1)=n^2+2n+1-x^2,$$

где x — целое; ясно, что при этом ab будет делиться на c. Пусть x — *наибольшее целое число, для которого* $x^2+x<n$. Тогда $n^2<a<b<c$, и остается доказать, что $c<n^2+n+3\sqrt{n}$, т. е. что $n+1-x^2<3\sqrt{n}$. Предположим, напротив, что $x^2 \leqslant n-3\sqrt{n}+1$. Тогда $x<\sqrt{n}-3/2$ (иначе $x^2 \geqslant n-3\sqrt{n}+9/4$), и, следовательно, $x+1<\sqrt{n}-1/2$. Но в этом случае $(x+1)^2+(x+1)<(n-\sqrt{n}+1/4)+(\sqrt{n}-1/2)<n$, что противоречит выбору x.

Л. Д. Курляндчик

М1139. *а) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько квадратов. Докажите, что у этого многогранника не больше 8 вершин.*

Наши рассуждения опираются на понятие кривизны многогранного угла — так называют величину $2\pi-\sigma$, где σ — сумма его плоских углов. О кривизне подробно рассказано в статье С. Л. Табачникова в этом номере журнала, в частности, там доказана «формула Декарта» — сумма кривизн всех многогранных углов выпуклого многогранника равна 4π.

б) Какое наибольшее число вершин может иметь выпуклый многогранник, поверхность которого можно разрезать на правильные треугольники?



а) Сумма плоских углов при любой вершине данного многогранника может равняться только $\pi/2$, π или $3\pi/2$. В самом деле, она меньше 2π, поскольку многогранный угол при любой вершине выпуклый. В то же время этот угол образован сгибанием и склеиванием нескольких прямых углов (углов квадратов) и, может быть, развернутого угла (если рассматриваемая вершина приходится на внутреннюю точку стороны одного из квадратов). Следовательно, сумма его плоских углов кратна $\pi/2$. Таким образом, кривизна многогранного угла при любой вершине не меньше $\pi/2$, и по формуле Декарта число вершин не превосходит $4\pi:(\pi/2)=$ $=8$. Пример 8-вершинника — куб.

б) Ответ: 12. Точно так же, как в п. а), доказывается, что кривизна многогранного угла при любой вершине не меньше $\pi/3$, значит, число вершин не превосходит $4\pi:(\pi/3)=12$. Пример 12-вершинника — правильный икосаэдр.

В. Э. Матизен

М1140. *Нарисуем на плоскости одну или несколько пересекающихся кривых (кривые могут иметь точки самопересечения, рис. 1). В каждой точке пересечения можно двумя способами выполнить «перестройку» (рис. 2). Если проделать перестройку во всех точках пересечения, то получится несколько непересекающихся кривых (рис. 3).*

а) Докажите, что число непересекающихся кривых, которые могут получиться, не больше числа областей, на которые делили плоскость исходные кривые (на рисунке 1 таких областей 7).

а) Пусть первоначально данные кривые делили плоскость на области V_1, $V_2,\ldots,V_n$. Каждая из новых, перестроенных кривых ограничивает область, состоящую из нескольких областей V_i. Выберем те из новых кривых, внутри которых нет других новых кривых, и отметим внутри каждой из них одну из областей V_i (рис. 5). Теперь сотрем эти кривые, среди оставшихся снова выберем «минимальные» (внутри которых нет других кривых) и отметим внутри каждой из них одну из областей V_i, не отмеченных на первом шагу. (Очевидно, такие области найдутся.) Продолжая в том же духе, мы сопоставили каждой новой кривой область V_i внутри нее, отмечаемую на соответствующем шаге, причем разным кривым будут сопоставлены разные области. Значит, число кривых не больше числа областей.

б) Раскрасим исходную картинку в шахматном порядке, т. е. так, чтобы внешняя область была белой и цвет области менялся при переходе через границу (рис. 6, *а*). (Существование такой раскраски легко доказать по индукции. При добавлении к уже раскрашенной картинке одной несамопересекающейся замкну-

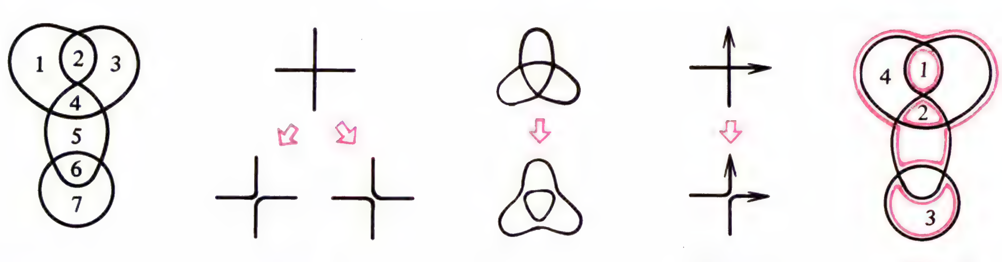
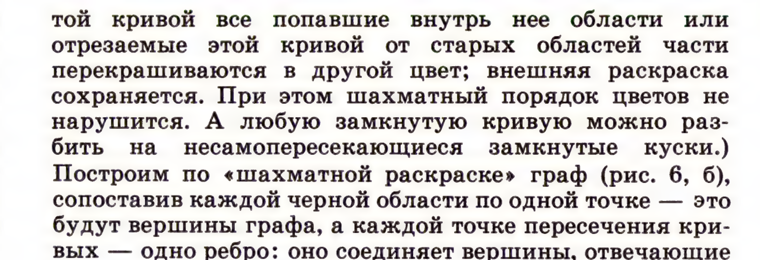


Рис. 1. *Рис. 2.* *Рис. 3.* *Рис. 4.* *Рис. 5.*

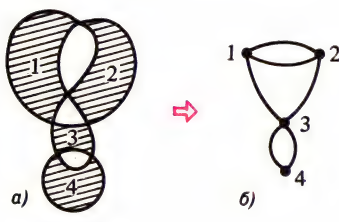
б) Всегда ли можно сделать перестройки так, чтобы в результате получалась одна кривая?

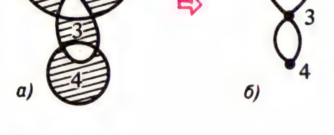
в) Выберем на каждой кривой направление обхода и будем производить перестройки в соответствии с этими направлениями так, чтобы стрелки «отталкивались» друг от друга (рис. 4). Может ли в результате получиться одна кривая?

Задачник „Кванта"



той кривой все попавшие внутрь нее области или отрезаемые этой кривой от старых областей части перекрашиваются в другой цвет; внешняя раскраска сохраняется. При этом шахматный порядок цветов не нарушится. А любую замкнутую кривую можно разбить на несамопересекающиеся замкнутые куски.) Построим по «шахматной раскраске» граф (рис. 6, б), сопоставив каждой черной области по одной точке — это будут вершины графа, а каждой точке пересечения кривых — одно ребро: оно соединяет вершины, отвечающие





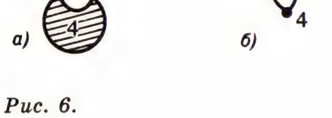


Рис. 6.

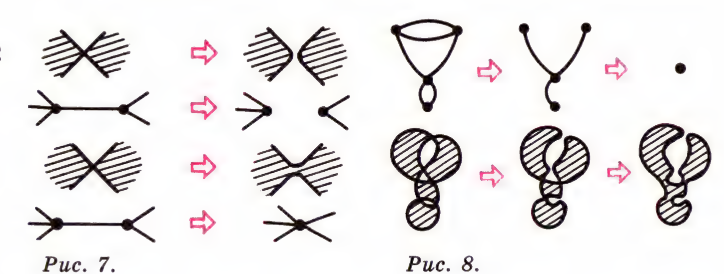


Рис. 7. Рис. 8.

черным областям, которые примыкают к этой точке. Два способа перестройки изображаются на графе двумя операциями: стиранием ребра и стягиванием ребра в точку (рис. 7).

Ясно, что на графе исходной картинки можно стереть часть ребер так, что он превратится в «дерево», т. е. граф, не имеющий замкнутых цепочек ребер. Оставшиеся ребра можно последовательно стянуть в точку. Соответствующая последовательность перестроек приводит к одной черной области. Ее граница и есть искомая кривая (рис. 8).

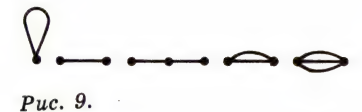


Рис. 9.

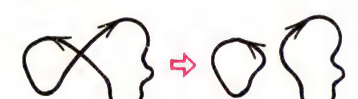


Рис. 10.

Интересно, что по графу можно восстановить соответствующий набор кривых. Подумайте, например, какие кривые отвечают графам, изображенным на рисунке 9.

в) Каждая перестройка превращает набор ориентированных кривых снова в набор ориентированных кривых. Предположим, что существует последовательность перестроек, результатом которой будет единственная кривая. Тогда перед выполнением последней перестройки мы располагаем набором ориентированных кривых с единственной точкой пересечения. Такой набор может состоять из единственной кривой — «восьмерки», изображенной на рисунке 10. Однако ее перестройка приводит к двум, а не к одной кривой.

С. Л. Табачников



Ф1148. *Цилиндр с намотанной на него нитью, второй конец которой закреплен, кладут на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с го-*

Рассмотрим момент времени, когда нить вертикальна. В силу нерастяжимости нити, нижняя точка ее вертикального участка и соприкасающаяся с ней точка цилиндра A имеют одинаковую, горизонтально направленную скорость $\vec{v}_A$. Представим движение цилиндра как сумму поступательного движения со

ризонтом, так, как показано на рисунке 1. В тот момент, когда нить была вертикальна, угловая скорость вращения цилиндра была равна ω. Определить, чему равна в этот момент: а) скорость оси цилиндра; б) скорость точки цилиндра, касающейся наклонной плоскости. Радиус цилиндра равен R.

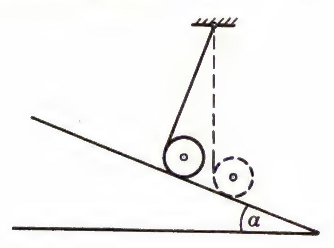


Рис. 1.

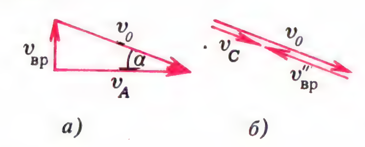
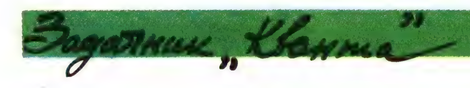


Рис. 2.



скоростью его оси $\vec{v}_0$, направленной параллельно наклонной плоскости (под углом α к горизонту), и вращения по часовой стрелке вокруг оси с угловой скоростью ω. В этом случае скорость точки A (рис. 2, а)

$$\vec{v}_A=\vec{v}_0+\vec{v}'_{\text{вр}}.$$

Как нетрудно видеть, $v'_{\text{вр}}=\omega R$, $\vec{v}_A\perp\vec{v}'_{\text{вр}}$, откуда получаем

$$v_0=\frac{\omega R}{\sin\alpha}.$$

Аналогичное соотношение можно записать для точки C касания цилиндром наклонной плоскости (рис. 2, б):

$$\vec{v}_C=\vec{v}_0+\vec{v}''_{\text{вр}},$$

или в проекциях на направление вдоль наклонной плоскости:

$$v_C=v_0-\omega R,$$

откуда

$$v_C=\frac{\omega R}{\sin\alpha}-\omega R=\omega R\,\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}.$$

В качестве дополнительного вопроса предлагаем вам самостоятельно найти величину скорости точки A цилиндра.

С. С. Кротов

Ф1149. *На проводящие рельсы игрушечной железной дороги беспорядочно бросают, замыкая рельсы, тонкие длинные оголенные проводники из меди. Оценить сопротивление между рельсами, если расстояние между ними $l=5$ см, диаметр проводника $d=0{,}2$ мм, его длина $h=30$ см, бросили $N=100$ проводников.*

Будем считать, что все брошенные проводники попадают на рельсы. Ясно, что замыкания проводников между собой не влияют на конечный результат — соответствующие точки проводников имеют одинаковые потенциалы.

Сопротивление одного проводника, составляющего с рельсами угол α ($0<\alpha<\pi$), равно

$$r_i=\rho\frac{l_i}{S}=\rho\frac{l/\sin\alpha_i}{\pi d^2/4}.$$

Для общего сопротивления между рельсами выполняется соотношение

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}}=\Sigma\frac{1}{r_i}=\Sigma\frac{\pi d^2\sin\alpha_i}{4\rho l}=\frac{\pi d^2}{4\rho l}N(\sin\alpha_i)_{\text{ср}}.$$

Среднее значение $\sin\alpha_i$ можно найти так:

$$(\sin\alpha_i)_{\text{ср}}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin\alpha\cdot d\alpha=\frac{2}{\pi}.$$

Тогда

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}}=\frac{\pi d^2}{4\rho l}N\frac{2}{\pi}=\frac{d^2N}{2\rho l},$$

и окончательно

$$R_{\text{общ}}=\frac{2\rho l}{d^2N}\approx4\cdot10^{-4}\ \text{Ом}.$$

Замечание. Мы посчитали среднее значение общего сопротивления. В зависимости от того, как проводники упадут на рельсы, величина сопротивления может больше или меньше отличаться от найденного значения. Попробуйте промоделировать явление с помощью персональной ЭВМ, воспользовавшись датчиком случайных чисел, и оценить возможный разброс результатов.

А. Р. Зильберман

Ф1150. *К идеальному одноатомному газу, заключенному внутри масляного пузыря, подводится тепло. Найти теплоемкость газа (в расчете на 1 моль) в этом процессе, если давлением снаружи пузыря можно пренебречь.*

Теплоемкостью C физической системы называется отношение количества теплоты ΔQ, которое необходимо подвести к ней для увеличения температуры на ΔT, к этому изменению температуры:

$$C=\frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Теплоемкость может быть функцией процесса передачи тепла, т. е. зависеть от объема V системы или от ее температуры T. Поэтому под ΔQ и ΔT будем понимать достаточно малые (математически—бесконечно малые) значения количества теплоты и изменения температуры.

Для моля идеального газа, запертого под пленкой в пузыре, подведенное количество теплоты ΔQ идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение им работы ΔA против сил поверхностного натяжения:

$$\Delta Q=\Delta U+\Delta A=\frac{3}{2}R\Delta T+p\Delta V.$$

Здесь R — универсальная постоянная, p — давление газа, равное давлению, создаваемому под пленкой силами поверхностного натяжения, ΔV — изменение объема пузыря при нагреве находящегося в нем газа.

Давление p определяется коэффициентом поверхностного натяжения σ и радиусом пузыря r:

$$p=\frac{4\sigma}{r}.$$

Эту формулу можно получить следующим образом. Разобьем мысленно пузырь на две равные половины и рассмотрим условие механического равновесия. Силы давления газа, разрывающие шар на его половины, есть $p\cdot\pi r^2$. Силы поверхностного натяжения, удерживающие их вместе, есть $2\sigma\cdot2\pi r$. Приравняв эти силы, получим приведенную формулу для давления.

Теперь свяжем работу газа $p\Delta V$ с изменением его температуры ΔT. Поскольку объем пузыря и давление в нем зависят от радиуса, то необходимо найти связь между изменением радиуса пузыря Δr и изменением температуры ΔT. Из уравнения состояния идеального газа $pV=RT$ имеем

$$p\Delta V+V\Delta p=R\Delta T.$$

Изменения объема ΔV и давления Δp связаны с изменением радиуса Δr следующими формулами:

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r,\ \Delta p = -\frac{4\sigma}{r^2}\Delta r.$$

Поэтому уравнение состояния дает

$$\frac{2}{3}\cdot 16\pi\sigma r\Delta r = R\Delta T.$$

Таким образом, работа газа

$$\Delta A = p\Delta V = R\Delta T - V\Delta p = R\Delta T + \frac{R\Delta T}{2} = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Окончательно получаем

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + \Delta A}{\Delta T} = \frac{3}{2}R + \frac{3}{2}R = 3R.$$

Как видно из расчета, половина подведенного количества теплоты идет на увеличение температуры газа, а вторая половина превращается в поверхностную энергию пленки.

А. А. Шеронов



Ф1151*. *Электростатический вольтметр представляет собой плоский конденсатор, одна из пластин которого закреплена неподвижно, а другая может двигаться, оставаясь параллельной первой пластине. Подвижная пластина прикреплена к стене при помощи пружины жесткостью $k=10$ Н/м. Начальное расстояние между пластинами $d=3$ см, площадь каждой пластины $S=0{,}5$ м^2. Рассчитать шкалу вольтметра. Какое максимальное напряжение можно измерять с его помощью? Рассмотреть отдельно случаи, когда вязкое трение очень мало и довольно велико.*

Предположим, что подвижная пластина сместилась на x и расстояние между пластинами стало $d-x$. В этом положении на пластину действуют две силы. Это — электрическая сила

$$F_{эл} = q\frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 SU}{d-x}\,\frac{U}{2(d-x)} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2(d-x)^2}$$

(здесь q — заряд пластины, E — напряженность поля в конденсаторе, U — напряжение между пластинами) и сила упругости

$$F_{упр} = kx.$$

Запишем условие равновесия пластины:

$$F_{эл} = F_{упр},\ \text{или}\ \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2(d-x)^2} = kx.$$

Отсюда получаем уравнение шкалы электростатического вольтметра:

$$U = \sqrt{\frac{2k}{\varepsilon_0 S}x(d-x)^2},\ \text{где}\ 0 \leqslant U < U_{max}.$$

Найдем U_{max}. Для этого исследуем на максимум выражение $U^2 = 2kx(d-x)^2/(\varepsilon_0 S)$:

$$(U^2)' = \left(\frac{2k}{\varepsilon_0 S}\right)((d-x)^2 - 2(d-x)x) = 0,\ \text{и}\ x_{max} = \frac{d}{3}.$$

Тогда

$$U_{max} = U(x_{max}) = \sqrt{\frac{8}{27}\frac{kd^3}{\varepsilon_0 S}} \approx 4{,}3\cdot 10^3\ \text{В}.$$

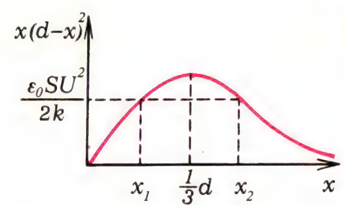


Рис. 1.

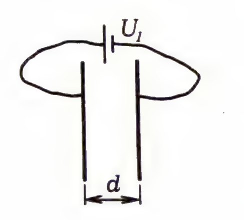


Рис. 2.

Очевидно, что при большом вязком трении U_{max} и есть максимальное измеряемое напряжение.

При малом вязком трении расчет усложняется. Действительно, из условия равновесия подвижной пластины следует, что положений равновесия два — на рисунке 1 это x_1 и x_2, причем x_1 соответствует устойчивому, а x_2 — неустойчивому равновесию. Если пластина проскочит x_2, то она пойдет и дальше, до соприкосновения с неподвижной пластиной. Именно это и ограничивает возможный диапазон измеряемых напряжений величиной $U_1 < U_{max}$. Найдем ее.

Пусть напряжение на конденсаторе равно U_1. Подвижная пластина начинает разгоняться и останавливается, пройдя расстояние x_2. Начальная энергия конденсатора

$$W_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} U_1^2.$$

Заряд, прошедший через источник (рис. 2),

$$\Delta q = \frac{\varepsilon_0 S}{d - x_2} U_1 - \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_1,$$

и работа источника

$$A = \Delta q U_1 = \left(\frac{\varepsilon_0 S}{d - x_2} - \frac{\varepsilon_0 S}{d}\right) U_1^2.$$

В положении x_2 энергия конденсатора

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{2(d - x_2)} U_1^2$$

и энергия пружины

$$W_{пр} = \frac{k x_2^2}{2}.$$

Запишем баланс энергий: $W_0 + A = W_1 + W_{пр}$, откуда после упрощений получаем

$$\frac{\varepsilon_0 S}{d(d - x_2)} U_1^2 = k x_2.$$

Но x_2 — положение равновесия, т. е.

$$k x_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2(d - x_2)^2} U_1^2.$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{d}{2}.$$

Этому значению x_2 и соответствует напряжение U_1, являющееся максимальным напряжением для случая очень малого вязкого трения:

$$U_1 = U(x_2) = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{kd^3}{\varepsilon_0 S}} \approx 3{,}9 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1152. *За линзой на расстоянии $L=4$ см (больше фокусного) расположено перпендикулярно главной оптической оси плоское зеркало. Перед линзой, также перпендикулярно главной оптической оси, расположен лист клетчатой бумаги (рис. 1). На этом листе получают изображения его клеток при двух положениях листа относительно линзы. Эти положения отличаются на $l=9$ см. Определить фокусное расстояние линзы.*

Одно из положений листа, когда его клетки — будем называть их предметом — отображаются оптической системой на нем же, довольно очевидное. Действительно, если первое изображение, создаваемое линзой, окажется точно в плоскости зеркала, то при вторичном прохождении лучей через линзу (после отражения от зеркала) они соберутся точно в плоскости листа. Таким образом, в этом случае расстояние от линзы до создаваемого ею изображения предмета равно

$$f_1=L. \tag{1}$$

Второе положение листа найти тоже не так сложно. Нетрудно убедиться, что если лист находится в фокальной плоскости линзы, то условия задачи выполняются. Действительно, лучи, идущие от каждой точки фокальной плоскости, после прохождения линзы преобразуются в параллельный пучок. Отразившись от зеркала, эти лучи останутся параллельными и, пройдя линзу, соберутся в ее фокальной плоскости. Таким образом, второе положение листа определяется условием

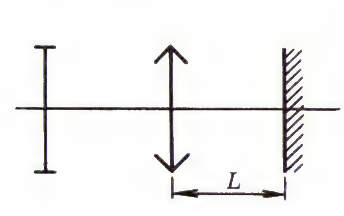


Рис. 1.
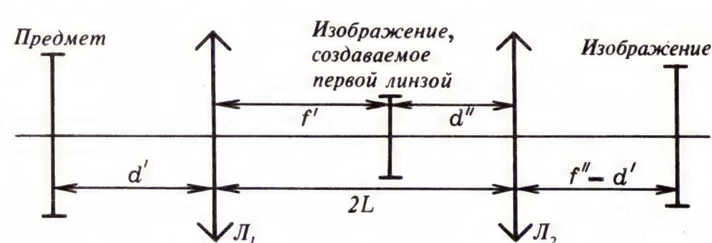


Рис. 2.

$$d_2=F. \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) можно получить и более строго. По условию задачи лучи света от бумаги проходят через линзу, отражаются от зеркала, снова проходят через линзу и попадают на ту же бумагу. Такая система эквивалентна оптической системе, изображенной на рисунке 2, где обе линзы одинаковые.

Изображение, создаваемое первой линзой, может находиться или между линзами, или правее линзы $Л_2$. В первом случае это изображение является действительным предметом для второй линзы. И мы можем написать уравнения:

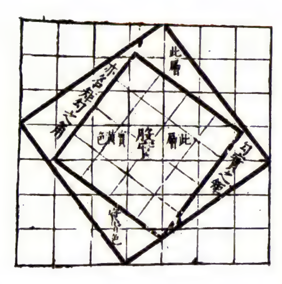
$$\frac{1}{d'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d''}+\frac{1}{f''}=\frac{1}{2L-f'}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{F},$$

откуда следует

$$\frac{1}{d'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{2L-f'}+\frac{1}{d'}, \text{ и } f'=L.$$

Во втором случае изображение, создаваемое первой линзой, является мнимым предметом для второй линзы,

(Окончание см. на с. 42)



Квадрат

Квадрат — это, пожалуй, самая совершенная геометрическая фигура. Он встречается в самых разных произведениях искусства: от оснований египетских пира-



мид до «Черного квадрата» Малевича. В математике квадрат впервые появился в теореме Пифагора. Доказательство теоремы Пифагора содержится на рисунках 1 и 2.

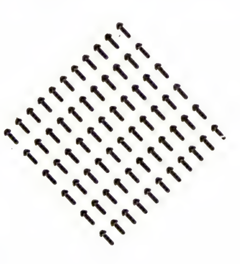


Не на много моложе и задача «квадратуры круга»: построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий данному кругу. Усилия многих замечательных математиков последних двух тысячелетий были направлены на то, чтобы доказать неразрешимость этой задачи. На рисунке 3 приведено приближенное решение задачи «квадратуры круга».

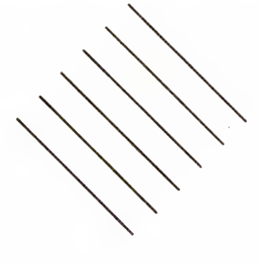
Измерить площадь фигуры в Древней Греции означало построить квадрат, равновеликий этой фигуре. С тех пор всякое вычисление площади принято называть *квадратурой*. С появлением интегрального исчисления площади стали вычислять также с помощью интегралов (рис. 4). Поэтому выражение, являющееся комбинацией интегралов, стали называть *записью в квадратурах*.

Разбиение квадрата на рисунке 5 может служить доказательством того, что сумма нечетных чисел от 1 до $2n-1$ равняется n^2

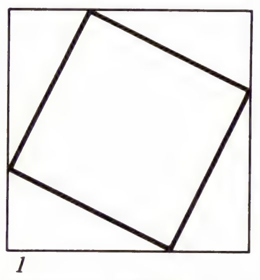
Квадрат можно разбить на квадраты меньших размеров — например, средними линиями. На рисунке 6 приведено более хитрое разбиение квадрата на квадраты с целочисленными сторо-



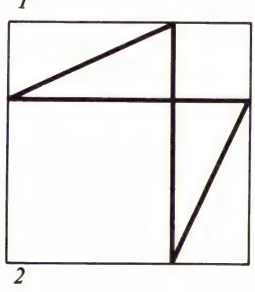




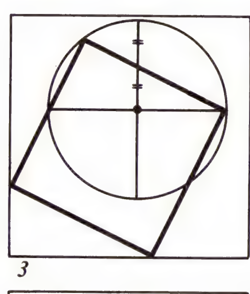
нами. Найдите их размеры, если известно, что длина стороны заштрихованного квадратика равна 2. Заметим, что эти квадратики не все различны. Долгое время



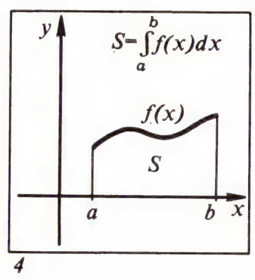
1



2



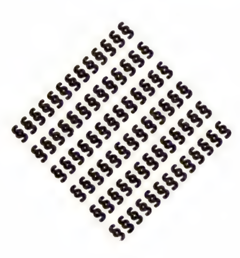
3

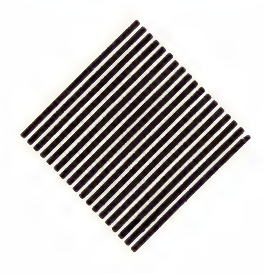


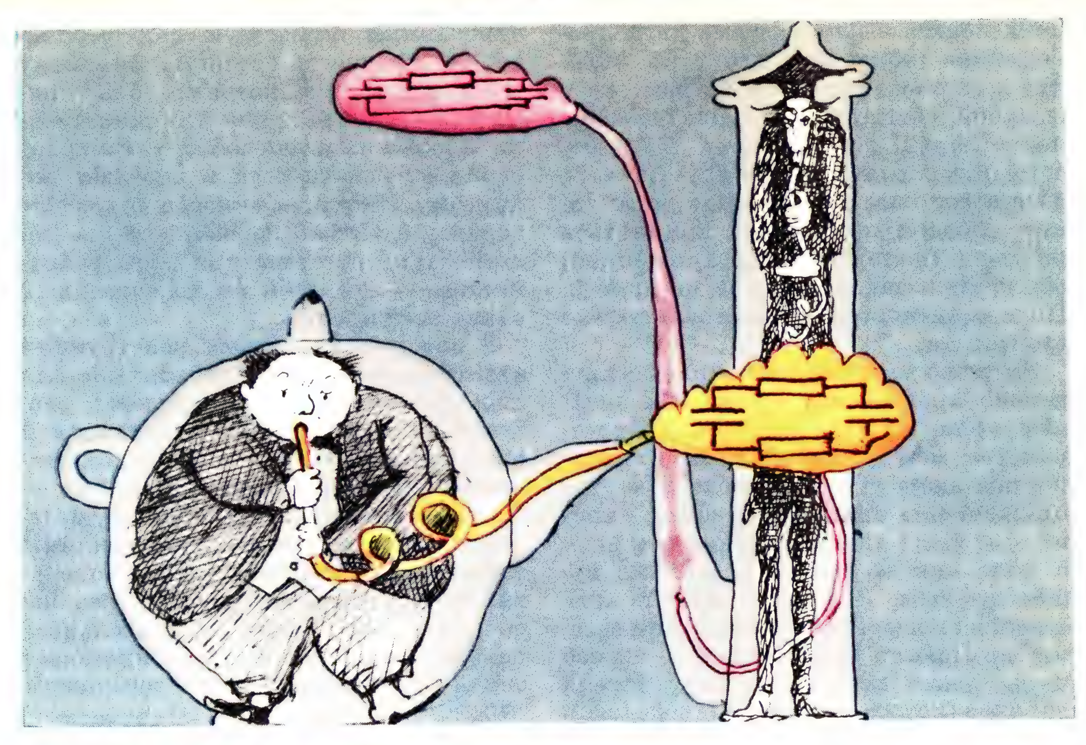
4

математики думали, что разбить квадрат на неравные квадраты невозможно. Так считали и замечательный советский математик Н. Н. Лузин, и известный польский математик Г. Штейн-

гауз (об этом он писал в первом издании своей книги «Математический калейдоскоп»). Это мнение подкреплялось тем, что совсем нетрудно доказать невозможность разбиения куба на различные кубики. Однако в 1939 году было построено разбиение квадрата на 55 различных квадратов. В 1940 году были найдены два способа разбиения квадрата







Практикум абитуриента

Закон сохранения энергии в электростатике

Кандидат физико-математических наук
С. А. ГОРДЮНИН

Закон сохранения энергии определяет в самом общем виде энергетический баланс при всевозможных изменениях в любой системе. Запишем его следующим образом:

$$A_{внеш} = \Delta W + Q, \qquad (1)$$

где $A_{внеш}$ — работа, совершенная над рассматриваемой системой внешними силами, ΔW — изменение энергии системы, Q — количество теплоты, выделяемое в системе. Договоримся, что если $A_{внеш} > 0$, то над системой совершают положительную работу, а если $A_{внеш} < 0$, положительную работу совершает система; если $\Delta W > 0$, то энергия системы увеличивается, а если $\Delta W < 0$, энергия уменьшается; наконец, если $Q > 0$, то в системе выделяется тепло, а если $Q < 0$, тепло системой поглощается.

В этой статье мы рассмотрим, как закон сохранения энергии «работает» в электростатике. В общем случае электростатическая система содержит взаимодействующие между собой заряды, находящиеся в электрическом поле.

Рассмотрим каждое слагаемое в уравнении (1) по отдельности.

Начнем с энергии. Энергия взаимодействия зарядов выражается через характеристики электрического поля этой системы зарядов. Так, например, энергия заряженного конденсатора емкостью C задается известным выражением

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2}qU, \qquad (2)$$

где q — заряд обкладок, U — напряжение между ними. Напомним, что

конденсатор — это система двух проводников (обкладок, пластин), обладающая следующим свойством: если с одной обкладки на другую перенести заряд q (т. е. одну обкладку зарядить зарядом $+q$, а другую $-q$), то все силовые линии созданного таким образом поля будут начинаться на одной (положительно заряженной) обкладке и заканчиваться на другой. Поле конденсатора существует только внутри него.

Энергию заряженного конденсатора можно представить также как энергию поля, локализованного в пространстве между пластинами с плотностью энергии $\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$, где E — напряженность поля. В сущности, именно этот факт дает основание говорить о поле как об объекте, реально существующем, — у этого объекта есть плотность энергии. Но надо помнить, что это просто эквивалентный способ определения энергии взаимодействия зарядов (которую теперь мы называем энергией электрического поля). Таким образом, мы можем считать энергию конденсатора как по формулам (2), так и по формуле

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V, \qquad (3)$$

где V — объем конденсатора. Последней формулой легко пользоваться, конечно, только в случае однородного поля, но представление энергии в такой форме очень наглядно, а потому удобно.

Конечно, кроме энергии взаимодействия зарядов (энергии электрического поля) в энергию системы может входить и кинетическая энергия заряженных тел, и их потенциальная энергия в поле тяжести, и энергия пружин, прикрепленных к телам, и т. п.

Теперь о работе внешних сил. Помимо обычной механической работы $A_{мех}$ (например, по раздвиганию пластин конденсатора), для электрической системы можно говорить о работе внешнего электрического поля. Например, о работе батареи, заряжающей или перезаряжающей конденсатор. Задача батареи — создать фиксированную, присущую данному источнику разность потенциалов между теми телами, к которым она присоединена. Делает она это единственно возможным способом — забирает заряд от одного тела и передает его другому. Источник никогда не создает заряды, а только перемещает их. Общий заряд системы при этом сохраняется — это один из краеугольных законов природы.

В источниках разных конструкций электрическое поле, необходимое для перемещения зарядов, создают различные «механизмы». В батареях и аккумуляторах — это электрохимические реакции, в динамомашинах — электромагнитная индукция. Существенно, что для выбранной системы зарядов (заряженных тел) это поле — внешнее, стороннее. Когда через источник с ЭДС $\mathscr{E}$ от отрицательного полюса к положительному протекает заряд Δq, сторонние силы совершают работу

$$A_{бат} = \Delta q \mathscr{E}. \qquad (4)$$

При этом если $\Delta q > 0$, то $A_{бат} > 0$ — батарея разряжается; если же $\Delta q < 0$, то $A_{бат} < 0$ — батарея заряжается и в ней накапливается химическая (или магнитная) энергия.

Наконец, о выделении тепла. Заметим только, что это джоулево тепло, т. е. тепло, связанное с протеканием тока через сопротивление.

Теперь обсудим несколько конкретных задач.

З а д а ч а 1. *Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C каждый присоединены к двум одинаковым батареям с ЭДС $\mathscr{E}$. В какой-то момент один конденсатор отключают от батареи, а другой оставляют присоединенным. Затем медленно разводят пластины обоих конденсаторов, уменьшая емкость каждого в n раз. Какая механическая работа совершается в каждом случае?*

Если процесс изменения заряда на конденсаторе осуществляется все время медленно, тепло выделяться не будет. Действительно, если через резистор сопротивлением R протек заряд Δq за время t, то на резисторе за

это время выделится количество теплоты $Q=I^2Rt=\left(\frac{\Delta q}{t}\right)^2 Rt=\frac{(\Delta q)^2 R}{t}$.

При достаточно больших t количество теплоты Q может оказаться сколь угодно малым.

В первом случае фиксирован заряд на пластинах (батарея отключена), равный $C\mathscr{E}$. Механическая работа определяется изменением энергии конденсатора:

$$A_{\text{мех}}=\Delta W=\frac{(C\mathscr{E})^2}{2(C/n)}-\frac{(C\mathscr{E})^2}{2C}=$$

$$=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}(n-1).$$

Во втором случае фиксирована разность потенциалов на конденсаторе и работает батарея, поэтому

$$A_{\text{мех}}+A_{\text{бат}}=\Delta W.$$

Через батарею протекает заряд

$$\Delta q=\frac{C}{n}\mathscr{E}-C\mathscr{E}=-C\mathscr{E}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Этот заряд меньше нуля, значит, батарея заряжается и ее работа

$$A_{\text{бат}}=\Delta q\mathscr{E}=-C\mathscr{E}^2\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Энергия поля в конденсаторе уменьшается:

$$\Delta W=\frac{1}{2}\frac{C}{n}\mathscr{E}^2-\frac{C\mathscr{E}^2}{2}=$$

$$=-\frac{C\mathscr{E}^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом,

$$A_{\text{мех}}=\Delta W \ A_{\text{бат}}=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Зарядка батареи происходит за счет работы по раздвиганию пластин и за счет энергии конденсатора.

Заметим, что слова про раздвигание пластин существенной роли не играют. Такой же результат будет при любых других изменениях, приводящих к уменьшению емкости в n раз.

З а д а ч а 2. *В схеме, изображенной на рисунке 1, найдите количество теплоты, выделившееся в каждом резисторе после замыкания ключа. Конденсатор емкостью C_1 заряжен до напряжения U_1, а конденсатор емкостью C_2 — до напряжения U_2. Сопротивления резисторов R_1 и R_2.*

Закон сохранения энергии (1) для данной системы имеет вид

$$0=\Delta W+Q, \text{ т. е. } Q=W_{\text{нач}}-W_{\text{кон}}.$$

Начальная энергия конденсаторов равна

$$W_{\text{нач}}=\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2U_2^2}{2}.$$

Для определения энергии в конечном состоянии воспользуемся тем, что суммарный заряд конденсаторов не может измениться. Он равен $C_1U_1\pm C_2U_2$ (для случаев, когда конденсаторы были соединены одноименно или разноименно заряженными пластинами соответственно). После замыкания ключа этим зарядом оказывается заряжен конденсатор емкостью C_1+C_2 (конденсаторы емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно). Таким образом,

$$W_{\text{кон}}=\frac{(C_1U_1\pm C_2U_2)^2}{2(C_1+C_2)},$$

и

$$Q=W_{\text{нач}}-W_{\text{кон}}=\frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)}(U_1\mp U_2)^2.$$

Как и должно быть, в обоих случаях выделяется тепло — есть джоулевы потери. Замечательно, что выделившееся количество теплоты не зависит от сопротивления цепи — при малых сопротивлениях текут большие токи и наоборот.

Теперь найдем, как количество теплоты Q распределяется между резисторами. Через сопротивления R_1 и R_2 в каждый момент процесса перезарядки текут одинаковые токи, значит, в каждый момент мощности, выделяемые на сопротивлениях, равны $P_1(t)=(I(t))^2R_1$ и $P_2(t)=(I(t))^2R_2$. Следовательно,

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

Кроме того, $Q_1+Q_2=Q$.
Поэтому окончательно

$$Q_1=Q\frac{R_1}{R_1+R_2},\ Q_2=Q\frac{R_2}{R_1+R_2}.$$

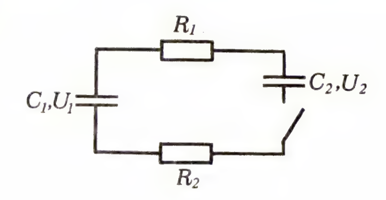


Рис. 1.

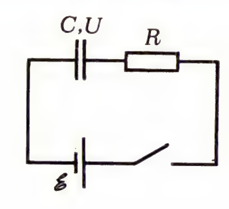


Рис. 2.

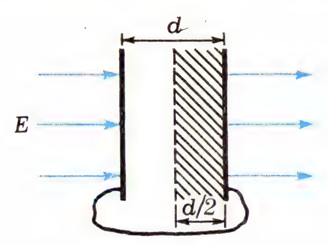


Рис. 3.

Задача 3. *В схеме на рисунке 2 конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U. Какое количество химической энергии запасется в аккумуляторе с ЭДС $\mathscr{E}$ после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится в резисторе?*

Первоначальный заряд на конденсаторе $q_1=CU$. После окончания перезарядки заряд на конденсаторе станет равным $q_2=C\mathscr{E}$. Протекший через батарею заряд в случае, когда к минусу батареи подключена отрицательно заряженная обкладка конденсатора, будет равен

$$\Delta q=q_2-q_1=C\mathscr{E}-CU.$$

В противном случае $\Delta q=C\mathscr{E}+CU$, и при этом аккумулятор будет разряжаться ($\Delta q>0$). А в первом случае при $U>\mathscr{E}$ аккумулятор заряжается ($\Delta q<0$), и количество химической энергии, запасенной в аккумуляторе после замыкания ключа, равно работе батареи:

$$\Delta W_{\text{хим}}=A_{\text{бат}}=C\mathscr{E}(U-\mathscr{E}).$$

Теперь запишем закон сохранения энергии (1) —

$$\mathscr{E}(C\mathscr{E}-CU)=\left(\frac{C\mathscr{E}^2}{2}-\frac{CU^2}{2}\right)+Q$$

— и найдем выделившееся количество теплоты:

$$Q=\frac{C}{2}(\mathscr{E}-U)^2>0.$$

Задача 4. *Плоский конденсатор находится во внешнем однородном поле с напряженностью $\vec{E}_0$, перпендикулярной пластинам. На пластинах площадью S распределены заряды $+q$ и $-q$. Расстояние между пластинами d. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы поменять пластины местами? Расположить параллельно полю? Вынуть из поля?*

Работа будет минимальной, когда процесс проводится очень медленно — при этом не выделяется тепло. Тогда, согласно закону сохранения энергии, $A_{\min}=\Delta W$.

Чтобы найти ΔW, воспользуемся формулой (3). Поле между пластинами представляет собой суперпозицию поля $\vec{E}_1$ данного плоского конденсатора —

$$E_1=\frac{q}{C}\frac{1}{d}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

— и внешнего поля $\vec{E}_0$.

При перемене пластин местами поле $\vec{E}_1$ меняется на $-\vec{E}_1$, а поле снаружи не меняется, т. е. изменение энергии системы связано с изменением ее плотности между пластинами конденсатора:

$$\Delta W=\frac{\varepsilon_0(E_0\mp E_1)^2}{2}Sd-\frac{\varepsilon_0(E_0\pm E_1)^2}{2}Sd=$$
$$=\mp 2\varepsilon_0 E_0 E_1 Sd.$$

Если направления векторов $\vec{E}_0$ и $\vec{E}_1$ были одинаковы, то плотность энергии между пластинами уменьшилась после перемены пластин местами, а если направления были противоположны, то плотность энергии увеличилась. Таким образом, в первом случае $A_{\min}=\Delta W=-2qE_0d$.

— конденсатор хочет сам развернуться и его надо удерживать ($A<0$), а во втором случае $A_{\min}=2qE_0d>0$.

Когда пластины конденсатора расположены параллельно полю, $\vec{E}_0$ и $\vec{E}_1$ перпендикулярны друг другу. Энергия поля внутри конденсатора в этом случае равна $\varepsilon_0(E_0^2+E_1^2)Sd/2$. Тогда

$$A_{\min}=\Delta W=\frac{\varepsilon_0(E_0^2+E_1^2)}{2}Sd-$$
$$-\frac{\varepsilon_0(E_0\pm E_1)^2}{2}Sd=\mp qE_0d.$$

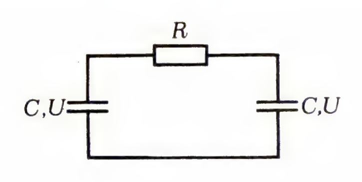


Рис. 4.

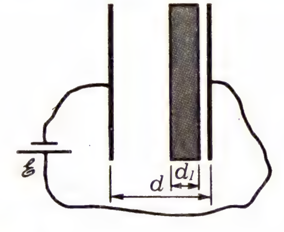


Рис. 5.

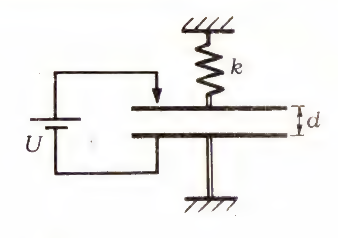


Рис. 6.

Когда конденсатор вынули из поля, в том месте, где он был, поле стало $\vec{E}_0$, а в нем самом теперь поле $\vec{E}_1$, т. е. ΔW и $A_{\min}$ оказываются такими же, как и в предыдущем случае.

Задача 5. *Конденсатор емкостью C без диэлектрика заряжен зарядом q. Какое количество теплоты выделится в конденсаторе, если его заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью ε? То же, но конденсатор присоединен к батарее с ЭДС ℰ.*

При заливании диэлектрика емкость конденсатора увеличилась в ε раз.

В первом случае фиксирован заряд на пластинах, внешних сил нет, и закон сохранения энергии (1) имеет вид

$$0=\Delta W+Q.$$

Отсюда

$$Q=-\Delta W=-\left(\frac{q^2}{2C\varepsilon}-\frac{q^2}{2C}\right)=$$
$$=\frac{q^2}{2C}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)>0.$$

Тепло выделяется за счет уменьшения энергии взаимодействия зарядов.

Во втором случае есть работа батареи и фиксировано напряжение на конденсаторе:

$$A_{\text{бат}}=\Delta q\mathscr{E}=(\varepsilon C\mathscr{E}-C\mathscr{E})\mathscr{E}=$$
$$=C\mathscr{E}^2(\varepsilon-1),$$

$$\Delta W=\frac{\varepsilon C\mathscr{E}^2}{2}-\frac{C\mathscr{E}^2}{2}=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}(\varepsilon-1).$$

Тогда из уравнения (1) следует

$$Q=A_{\text{бат}}-\Delta W=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}(\varepsilon-1).$$

Задача 6. *Две соединенные проводником пластины площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало́ по сравнению с размерами пластин) во внешнем однородном поле с напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярной пластинам (рис. 3). Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния d/2?*

Пластины эквипотенциальны, и между ними поля нет. Результатом работы по сближению является создание поля с напряженностью E в объеме $S(d-d/2)$. Тогда, в соответствии с уравнениями (1) и (3),

$$A=\Delta W=\frac{\varepsilon_0E^2}{4}Sd>0.$$

Упражнения

1. Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C каждый соединены параллельно и заряжены до напряжения U. Пластины одного из конденсаторов медленно разводят на большое расстояние. Какая при этом совершается работа?

2. Два конденсатора, каждый емкостью C, заряжены до напряжения U и соединены через резистор (рис. 4). Пластины одного из конденсаторов быстро раздвигают, так что расстояние между ними увеличивается вдвое, а заряд на пластинах за время их перемещения не изменяется. Какое количество теплоты выделится в резисторе?

3. Плоский воздушный конденсатор присоединен к батарее с ЭДС ℰ. Площадь пластин S, расстояние между ними d. В конденсаторе находится металлическая плита толщиной d_1, параллельная пластинам (рис. 5). Какую минимальную работу нужно затратить, чтобы удалить плиту из конденсатора?

4. Большая тонкая проводящая пластина площадью S и толщиной d помещена в однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярной поверхности пластины. Какое количество теплоты выделится в пластине, если поле мгновенно выключить? Какую минимальную работу надо совершить, чтобы удалить пластину из поля?

5. Одна из пластин плоского конденсатора подвешена на пружине (рис. 6). Площадь каждой пластины S, расстояние между ними в начальный момент d. Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения U. Какой должна быть минимальная жесткость пружины, чтобы не произошло касание пластин? Смещением пластин за время зарядки пренебречь.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1988 году

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Горьковский (1), Казанский (2), Петрозаводский (3), Тбилисский (4), Уральский (5), Ярославский (6) и институты — Хабаровский педагогический (7), Горьковский политехнический (8), Московский автомеханический (9), Московский институт связи (10), Московский институт электронного машиностроения (11), Рижский политехнический (12), Томский политехнический (13).

Математика

Алгебра

1(10). Периметр некоторого многоугольника равен 158 см, причем длины его сторон составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3 см. Наибольшая сторона многоугольника равна 44 см. Сколько сторон имеет многоугольник?

2(6). Моторная лодка, проплывая по реке из пункта A в пункт B против течения, затрачивает на треть больше времени, чем на обратный путь. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

3(12). Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 16 дней. Когда они вместе проработали 4 дня, первый рабочий заболел, и работу закончил второй рабочий, проработав еще 36 дней. За сколько дней всю работу мог бы сделать один первый рабочий?

4(12). Готовясь к экзамену по математике, абитуриент решил 116 задач по алгебре и геометрии. Если к 1/3 числа решенных задач по алгебре прибавить еще 8 задач, то полученная сумма будет равна числу решенных задач по геометрии. Сколько задач по алгебре решил абитуриент при подготовке к экзамену?

5(10). Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60 % меди?

6(9). Знаменатель несократимой дроби на 2 больше, чем числитель. Если у дроби, обратной данной, уменьшить числитель на 3 и вычесть из полученной дроби данную дробь, то получится 1/15. Найдите эту дробь.

7(8). Экспресс проходит от Москвы до Ленинграда на 3 часа 30 минут быстрее, чем пассажирский поезд, так как за 1 час он проходит на 35 км больше. Какова скорость каждого из них, если расстояние между Москвой и Ленинградом равно 650 км.

8(8). Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 2 часа. Сколько времени затратил на путь AB каждый из пешеходов, если первый пришел в B на 1 час 40 минут позднее, чем второй в A?

9(8). Двое рабочих изготовили за месяц 220 деталей. В следующем месяце производительность первого рабочего возросла на 15 %, а второго — на 10 %. За второй месяц они изготовили 247 деталей. Сколько деталей изготовил каждый рабочий за второй месяц?

10(2). На некотором участке пути средняя скорость поезда была ниже на 20 %, чем предусмотрено расписанием. На сколько процентов увеличилось время прохождения этого участка?

11(1). Первый раствор содержал цемента и песка в пропорции 3:4, а второй — в отношении 1:2. В каком соотношении надо взять эти растворы, чтобы получить раствор в пропорции 15:22?

12(6). Сколькими способами можно составить сумму в двадцать рублей из монет достоинством 15 и 20 копеек?

13(1). Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма всех ее членов равна 4, а сумма первых двух членов равна 3.

14(9). Сумма кубов членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии относится к сумме квадратов ее членов как 12:13. Сумма первых двух членов прогрессии равна 4/3. Найдите эту прогрессию.

15(5). Мотоциклист, велосипедист и пешеход движутся по шоссе с постоянными скоростями в одну сторону. В 12 часов мотоциклист отставал от велосипедиста на расстояние в 3 раза меньшее, чем расстояние, на которое отставал велосипедист от пешехода. В 12 часов 15 минут мотоциклист догнал велосипедиста, а в 12 часов 40 минут — пешехода. Какое время будут показывать часы, когда велосипедист догонит пешехода?

16(5). Велосипедист и пешеход движутся по шоссе в одну сторону, а навстречу им едет мотоциклист. Скорости у всех постоянны. В 12 часов велосипедист отставал от пешехода, а мотоциклист был впереди пешехода, причем расстояние между велосипедистом и пешеходом было в 10 раз меньше, чем расстояние между пешеходом и мотоциклистом. В 13 часов велосипедист догнал пешехода, а в 14 часов 12 минут велосипедист встретился с мотоциклистом. Какое время будут показывать часы, когда мотоциклист встретится с пешеходом?

17(5). На рынке 1 кг апельсинов и 3 кг грейпфрутов вместе стоят столько же, сколько 4 кг мандаринов; а по 1 кг самого дорогого и самого дешевого из этих продуктов да еще 1 кг грейпфрутов и 2 кг мандаринов — столько же, сколько 6 кг апельсинов. Сколько

стоит 1 кг каждого из этих фруктов, если 1 кг самого дорогого из них стоит на 1 рубль больше, чем 1 кг самого дешевого?

18(5). В цехе фасуют в коробки печенье, пряники и вафли. 4 коробки печенья и 1 коробка пряников вместе весят столько же, сколько 5 коробок вафель; а по одной самой тяжелой и самой легкой из этих коробок да еще 1 коробка пряников и 3 коробки вафель — столько же, сколько 7 коробок печенья. Найдите массы коробок с каждым из этих продуктов, если масса самой тяжелой из них на 2 кг больше массы самой легкой.

19. Вычислите

а)(2). $\left(\frac{11^3+3^3}{14}-33\right):(10^2-6^2)$.

б)(2). $\log_{0,6\sqrt[8]{0,36}}0,216$.

в)(10). $\frac{\log_2^2 18-4\log_2^2 3+3\log_2 18+6\log_2 3}{\log_2 18+2\log_2 3}$.

г)(10). $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}}-9\cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}}+4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$.

д)(2). $\frac{1}{\cos 10^\circ}\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 50^\circ$.

е)(13). $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

ж)(13). $\frac{\cos 64^\circ\cdot\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cdot\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cdot\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cdot\cos 19^\circ}$.

з)(13). $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.

и)(1). $\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\right.$

$\left.+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right):$

$:\left(\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+a\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}}{a+b}\right)$.

к)(13). $\left(\sqrt{1+(a^{2/3}-x^{2/3})\cdot x^{-2/3}}\right)^{-6}-\frac{a^2+x^2}{a^2}$.

л)(13). $\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$, если $x=\frac{4}{5}m$.

20(1). Докажите, что $\sin 15^\circ=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$.

21(7). Вычислите $\sin 18^\circ$.

22(10). Постройте график функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\frac{2x}{x^2+1}}-\sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}}}{\sqrt{1+\frac{2x}{x^2+1}}+\sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}}}.$$

23. Решите уравнения

а)(10). $\frac{16x^4-1}{16x^2-4}=4x+2,5$.

б)(8). $\sqrt{5x+10}+x+2=0$.

в)(9). $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

г)(2). $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-12}=5$.

д)(2). $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.

е)(1). $3^{4\lg x}=8,1x$.

ж)(12). $0,2^{\log_{\frac{1}{5}}2-2x}-5^{x+3\log_5 2}=10$.

з)(12). $0,2\cdot x^{\log_5 x+3}=25^{2,5+\log_5 x}$.

и)(9). $\log_3^2 x=\log_3(9-2x^{\log_3 x})$.

к)(10). $\log_{4x}2\cdot\log_{\frac{x}{4}}2=\log_{\frac{x}{16}}2$.

л)(1). $(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}})^x+(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}})^x=6$.

м)(13). $\log_x(2x^2-7x+12)=2$.

н)(9). $\cos 9x-\cos 7x-\cos(\pi+3x)-$

$-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

о)(10). $\sin 2x\cdot\sin 6x=\cos x\cdot\cos 3x$.

п)(6). $\log_2\sin 2x=1+\log_2\sin x+\log\cos x$.

р)(10). $2\sin^2 x+2\sin x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}$.

с)(12). $\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\sqrt{3x^2-17x-6}=0$.

т)(6). $2^{\cos^2 x}-8^{\sin^2 x}=0$.

у)(6). $\frac{\lg(\cos^2 x)}{\lg(11-x^2)}=0$.

24. Решите неравенства

а)(10). $x+7\leqslant\frac{28-31x}{x^2-5x+4}$.

б)(9). $f'(x)-f(x)\geqslant 0$, если $f(x)=\frac{3}{5-x}$.

в)(10). $f'(x)<g'(x)$, если $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, $g(x)=5x+\frac{1}{x}$.

г)(1). $(10x+3)\sqrt{-x^2+3x+1}\geqslant 0$.

д)(6). $\sqrt{x^2-9}<x$.

е)(8). $|x|\leqslant\sqrt{x^2-2}+1$.

ж(5). $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_2(x^2-x)}\geqslant 0,2$.

з)(8). $\frac{1}{4^{-x}+2}-\frac{1}{4^{-x}+1}<-\frac{1}{6}$.

и)(5). $2^{\log_{1/3}(x^2-2x)}\geqslant 0,5$.

к)(10). $(x^2-2x-3)(2-2^{1-\cos 2x})^2<0$.

л)(5). $(0,5)^{x^2-3x-6}<4$.

м)(8). $\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5)$.

н)(8). $\log_{\frac{1}{2}}9^{-1}+x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{3^{5x-7}}>0$.

25(10). Решите систему неравенств

$$\frac{\sqrt{x^2-x-20}}{x-7}<1,\quad x(6-x)\geqslant 0.$$

26(9). Найдите область определения функции:

$$f(x) = \sqrt{\log_{(x-2)}(x^2-8x+15)}.$$

27. Решите системы уравнений

а)(1). $\begin{cases} x^4+16y^4=32, \\ x+2y=4. \end{cases}$

б(8). $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{xy} \\ x+y=5. \end{cases}$

в)(7). $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x=81, \\ \lg(y+x)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

г) (8). $\begin{cases} 4^x \cdot 5^y=16, \\ 2^y \cdot 3^{x+1}=27. \end{cases}$

д) (8). $\begin{cases} \log_4(x^2(y+2))=2, \\ 2\log_2 x+2\log_2(y+2)=6. \end{cases}$

28 (10). Квадратные трехчлены $x^2-11x+q$ и $ax^2-7x-20$ имеют общий корень, равный 4. Существуют ли такие значения x, при которых значение, принимаемое первым трехчленом, было бы на 50 больше значения, принимаемого вторым трехчленом?

29 (12). Найдите целое значение a, при котором числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 4x+3y=-2a, \\ x-2y=5, \end{cases}$$

удовлетворяют также условиям $x>2$ и $y<-1$.

30 (2). Разность квадратов корней уравнения $3x^2-5x+p=0$ равна 5/9. Найдите p.

31 (10). В уравнении $4x^2-8x+c=0$ сумма кубов его корней равна 3,5. Найдите коэффициент c.

32 (1). Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ выполнены неравенства $f(-1)<1$, $f(1)>-1$, $f(3)<-4$. Определите знак коэффициента a.

33 (10). Найдите, при каких значениях b для всех x выполняется тождество

$$\sin^2\left(\frac{15}{8}\pi-x\right)-\cos^2\left(\frac{17}{8}\pi-x\right)=-\frac{b\sqrt{2}}{2}\cos 2x.$$

Анализ

1. Постройте графики функций

а) (8). $y=2x+|x-3|$.

б) (8). $y=|3+2x-x^2|+3x-3$.

в) (10). $y=\dfrac{(2-x)(x^2-x-2)}{|x+1|}$.

2 (13). Определите графически, сколько действительных корней имеет уравнение $2^x=x^3$.

3 (13). Установите графически, в какой четверти находится точка пересечения графиков

$$xy=10 \text{ и } x^2+y=1.$$

4 (8). Найдите координаты всех точек пересечения графиков функций

$$y=\sin 4x \text{ и } y=2\sin 2x-2\sin^2 x.$$

5 (13). Вычислите $y'\left(-\frac{8}{27}\right)$, если $y=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}$.

6 (13). Найдите угловой коэффициент касательной к кривой

$$y=x^2-4x+3$$

в точке $M(0;\ 3)$.

7 (10). Найдите модуль разности экстремумов функции

$$y=x^3+3x^2-3x+1.$$

8 (13). Найдите наименьшее значение функции

$$y=x^3-3x^2+3x+2$$

на промежутке $x\in[-2;\ 2]$.

9 (5). Определите наименьшее значение функции $y(x)=ax^2+4x+c$ на отрезке $[2,\ 3]$, если $y(-2)=-13$, $y(4)=-25$.

10 (6). Найдите множество значений функции

$$f(x)=10^x+3\cdot 10^{-x}.$$

Геометрия

1 (9). Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Найдите x и y из векторного равенства

$$2^x\vec{a}+y\cdot\vec{b}=40\cdot 5^y\vec{a}+(2-x)\vec{b}.$$

2 (2). Векторы $\vec{a}=(x,\ 2)$ и $\vec{b}=(3,\ y)$ имеют одинаковые неравные нулю суммы компонент. Найдите y, если векторы $5\vec{a}+2\vec{b}$ и $4\vec{a}+3\vec{b}$ коллинеарны.

3 (7). Вершины четырехугольника находятся в точках A (0, 0), B (—1, 1), C (0, 2), D (1, 1). Докажите, что $ABCD$ является квадратом.

4 (5). В треугольнике ABC заданы стороны $AB=2\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{5}$ и угол $A=45°$. Чему равна площадь этого треугольника, если дополнительно известно, что высота, опущенная из вершины C на сторону AB, меньше $\sqrt{2}$?

5 (10). Найдите высоту равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 5, а косинус угла при вершине равен $\left(-\frac{7}{25}\right)$.

6 (8). Около круга радиусом R описан равнобедренный треугольник с углом 120°. Определите стороны треугольника.

7 (2). Длина стороны правильного шестиугольника равна $2\sqrt{6}$. Найдите длину стороны равновеликого ему равностороннего треугольника.

8 (6). Основание равнобедренного треугольника равно 10, а опущенная на него высота — 12. Вершины треугольника служат центрами трех попарно касающихся кругов. Найдите радиус четвертого круга, который касается трех указанных кругов.

9 (1). Определите углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной и той же вершины треугольника, делят соответствующий угол на 4 равные части.

10 (1). Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность правильного треугольника. Точка K лежит на меньшей дуге AB. Докажите, что $|AK|+|BK|=|KC|$.

11 (5). Точка O и равнобедренный треугольник ABC лежат в одной плоскости. Известно, что $AO=BO=\sqrt{7}$, $OC=1$, угол ACB равен 120°. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB<4$, и выясните, где лежит точка O — вне или внутри треугольника ABC.

12 (13). В равнобокую трапецию, основания которой 2 и 8, вписан круг. Чему равен радиус этого круга?

13 (8). В трапеции даны основания: 8 и 12. Один из острых углов равен 30°, продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом. Найдите высоту трапеции.

14 (8). В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

15 (5). В трапеции $ABCD$ заданы боковые стороны $AB=2\sqrt{3}$, $CD=\sqrt{10}$, одно основание $BC=4$ и угол $A=60°$. Чему равна площадь трапеции, если дополнительно известно, что площадь треугольника ABD меньше 8?

16 (12). Диагональ равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{13}$ и составляет угол α с большим основанием трапеции. Найдите высоту трапеции, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$.

17 (10). В пересечении двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6. Найдите радиус окружностей.

18 (10). В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найдите длину хорды CD.

19 (2). Внутри круга, радиус которого равен 13, дана точка M, отстоящая от центра круга на 5. Через точку M проведена хорда $AB=25$. Определите произведение длин отрезков, на которые хорда AB делится точкой M.

20 (12). В ромбе острый угол равен α, а бо́льшая диагональ ромба равна 16. Найдите площадь ромба, если $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$.

21 (11). Найдите угол A треугольника ABC, если заданы длины его сторон $AC=b$, $AB=c$ и длина l биссектрисы внутреннего угла A.

22 (13). В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе проведена высота CD, угол B равен 60°, отрезок BD — 1. Найдите длину гипотенузы.

23 (5). Равносторонний треугольник ABC и точка O лежат в одной плоскости. Известно, что $AO=BO=2\sqrt{13}$, $OC=2\sqrt{3}$ и угол CAO меньше 60°. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB>\sqrt{17}$, и выясните, где лежит точка O — вне или внутри треугольника ABC.

24 (13). На сколько процентов уменьшится объем пирамиды, если одновременно уменьшить площадь ее основания и высоту на 20 %?

25 (13). Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π. Найдите угол наклона образующей к основанию.

26 (8). Найдите косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

27 (8). В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат, одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно основанию. Определите объем пирамиды, если ее наибольшее боковое ребро равно l, а отрезок, соединяющий центр основания с вершиной, равен b.

28 (10). Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проведенной через середины двух смежных боковых ребер параллельно высоте пирамиды. (Построение объясните.) Вычислите площадь сечения, если боковое ребро равно 18, а диагональ основания $16\sqrt{2}$.

29 (7). В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8, а плоский угол при вершине 45°. Найдите полную поверхность пирамиды.

30 (13). Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если длина стороны ее основания равна 6, а величина двугранного угла при основании равна 45°.

31 (8). В правильной треугольной призме проведено сечение через сторону основания и середину противоположного бокового ребра. Найдите площадь сечения, если площадь основания S, а диагональ боковой грани наклонена к основанию под углом α.

32 (2). В правильной четырехугольной пирамиде высота в два раза меньше стороны основания. Найдите угол (в градусах) между боковыми гранями пирамиды.

33 (10). Высота правильной треугольной пирамиды вдвое меньше стороны основания. Определите двугранный угол при основании пирамиды.

34 (7). Площадь осевого сечения цилиндра равна Q, угол между диагональю сечения и плоскостью основания равен α. Найдите объем цилиндра.

35 (6). В правильной треугольной пирамиде $SABC$, где S — вершина, сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию, которая проходит через середины ребер AB и AC.

36 (7). Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, если объем цилиндра равен 120π, а боковая поверхность равна 60π.

Физика

Механика

1(3). В течение какого времени пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью $v_1=60$ км/ч, будет видеть проходящий мимо него встречный поезд, скорость которого $v_2=48$ км/ч, а длина $l=150$ м? Ответ выразите в секундах.

2(1). Автомобиль начинает движение из состояния покоя и проходит путь $l=120$ м. Первые $l_1=80$ м он движется равноускоренно, а оставшиеся $l_2=40$ м — равномерно и проходит их за $t=2$ с. Какова средняя скорость автомобиля на всем пути?

3(11). На рисунке 1 дан график зависимости ускорения от времени при прямолинейном движении материальной точки. Постройте график зависимости скорости точки от времени. Определите путь, пройденный точкой за все время движения. Начальная скорость точки равна нулю.

4(4). В момент начала свободного падения первого тела второе тело начинает скользить без трения с наклонной плоскости (рис. 2). Сравните времена движения этих тел.

5(7). Камень, падающий свободно без начальной скорости, пролетает вторую половину пути за $t=2$ с. С какой высоты он падал?*)

*) Здесь и далее ускорение свободного падения считается равным $g=10$ м/с^2.

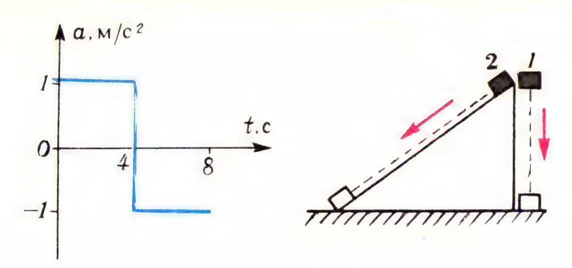


Рис. 1. *Рис. 2.*

Рис. 3.

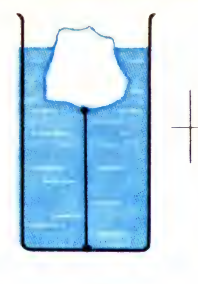


Рис. 4.

6(3). С неподвижного относительно земли вертолета сбросили без начальной скорости тело. Спустя $t_1=1$ с было сброшено тоже без начальной скорости второе тело. Определите расстояние между телами через $t_2=2$ с от начала падения первого тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

7(13). Какой высоты одновременно достигнут звук выстрела и пуля при вертикально произведенном выстреле с начальной скоростью $v_0=350$ м/с? Скорость звука принять равной $v=340$ м/с. Сопротивление движению пули не учитывать.

8(11). Тело массой $m=0{,}5$ кг брошено со скоростью $v_0=20$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определите наибольшую высоту подъема тела, дальность полета и изменение импульса тела за время полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

9(12). На нити подвешен груз, масса которого $m=1$ кг. Нить с грузом опускают вниз с ускорением $a=5$ м/с^2. Определите силу натяжения нити.

10(5). На тело массой m, расположенное на горизонтальной плоскости, действует сила $\vec{F}$, направленная вниз под углом α к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость μ. Найдите ускорение тела.

11(12). Через неподвижный блок перекинута нить, к концам которой подвешены два одинаковых груза массой $M=0{,}5$ кг каждый. Когда к одному из грузов подвесили дополнительное тело, каждый груз, пройдя расстояние $l=1$ м, приобрел скорость $v=2$ м/с. Определите массу дополнительного тела. Массами нити и блока пренебречь. Нить нерастяжима.

12(11). По выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны $R=40$ м, движется автобус массой $m=2\cdot10^3$ кг со скоростью $v=36$ км/ч. Определите ускорение автобуса и силу его давления на мост в верхней точке моста.

13(3). Брус массой $m=50$ кг и длиной $l=10$ м одним концом опирается о горизонтальную плоскость. Другой его конец удерживается веревкой так, что веревка и брус образуют прямой угол, а брус и горизонтальная плоскость — угол $\alpha=60°$. Найдите силу натяжения веревки.

14(9). Шар радиусом R покоится на поверхности земли. С верхней точки шара скользит из состояния покоя тело, размеры которого много меньше размеров шара. На какой высоте над поверхностью земли тело отделится от шара?

15(10). Деревянный брусок находится на наклонной плоскости. С какой наименьшей силой нужно прижать брусок к наклонной плоскости, чтобы он остался на ней в покое? Масса бруска $m=0{,}2$ кг; длина наклонной плоскости $l=1$ м, а высота $h=0{,}5$ м; коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu=0{,}4$.

16(7). Автомобиль массой $m=3$ т движется равномерно со скоростью $v=40$ км/ч. Найдите мощность, развиваемую двигателем автомобиля, если коэффициент трения $\mu=0{,}06$.

17(1). Горизонтальный стол сделан из двух видов материала, так что коэффициент трения между кубиком и столом имеет значения μ_1 и μ_2 (рис. 3). Расстояние от кубика до поверхности с коэффициентом трения μ_2 равно a. Какой путь пройдет кубик до остановки, если ему сообщить горизонтальную скорость v_0?

18(13). Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0=6$ м/с с высоты $H=5$ м. Определите кинетическую энергию тела при падении на землю, если его масса $m=1$ кг.

19(5). По наклонной плоскости высотой $h=0{,}5$ м и длиной склона $l=1$ м скользит тело массой $m=3$ кг. Тело приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью $v=2{,}45$ м/с. Найдите количество теплоты, выделившееся при трении, и коэффициент трения тела о плоскость. Начальная скорость тела была равна нулю.

20(4). Два свинцовых шара, массы которых одинаковы, движутся со скоростями v и $2v$ навстречу друг другу. Определите повышение температуры шаров в результате неупругого удара, если $v=9$ м/с, а удельная теплоемкость свинца $c=130$ Дж/(кг·К).

21(4). Частица налетает на покоящуюся мишень и отражается назад с уменьшенной в n раз кинетической энергией. Определите отношение массы частицы к массе мишени, если соударение упругое.

22(3). Кусок металла падает с высоты $h=10$ м на такой же второй кусок. Удар неупругий, куски слипаются в единый блок. На сколько изменится температура блока, если первоначально оба куска были при одной и той же температуре? Сопротивлением воздуха и теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельная теплоемкость металла $c=2{,}5\cdot10^2$ Дж/(кг·К).

23(4). Частица, движущаяся с кинетической энергией E_0, упруго сталкивается с такой же неподвижной частицей и отклоняется от пер-

воначального направления на угол $\alpha = 60°$. Определите кинетические энергии частиц после соударения.

24(11). В стакане с водой плавает лед. Как будут изменяться уровень воды в стакане и давление на дно стакана при таянии льда?

25(11). Можно ли достать воду из колодца глубиной $h = 12$ м с помощью насоса, расположенного на поверхности земли и способного создавать в опущенной в колодец трубе сколь угодно низкое давление? Атмосферное давление на поверхности $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

26(12). Бревно длиной $l = 3{,}5$ м и поперечным сечением $S = 0{,}04$ м² плавает в воде. Какую наибольшую массу может иметь человек, чтобы бревно не начало тонуть, когда человек встанет на него? Плотность бревна $\rho_б = 500$ кг/м³, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м³.

27(1). В цилиндрическом стакане с водой плавает льдинка, притянутая нитью ко дну (рис. 4). Когда льдинка растаяла, уровень воды понизился на Δh. Каково было натяжение нити? Площадь дна стакана S.

28(4). Деревянный шарик, падая с высоты $h_1 = 20$ см, погрузился в воду на глубину $h_2 = 60$ см. На какую высоту выпрыгнет из воды этот шарик? Сопротивление воды считать постоянным; сопротивлением воздуха пренебречь. Плотность дерева $\rho_д = 0{,}8$ г/см³, воды — $\rho_в = 1$ г/см³.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1(7). Найдите плотность гелия при температуре $t = 20$ °С и давлении $p = 10^5$ Па. Молярная масса гелия $M = 4$ г/моль.*

2(3). При какой температуре $m_1 = 1$ г азота будет занимать тот же объем, что и $m_2 = 1$ г кислорода при $t_2 = 47$ °С? Давления обоих газов одинаковы. Молярная масса азота $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, кислорода — $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

3(13). Из баллона со сжатым кислородом при изотермическом процессе израсходовали столько кислорода, что его давление упало от $p_1 = 9{,}8$ МПа до $p_2 = 7{,}84$ МПа (1 МПа $= 10^6$ Па). Какая доля кислорода израсходована?

4(3). Какое количество теплоты выделится при охлаждении на $\Delta t = 1$ °С воды в пруду, имеющем площадь $S = 420$ м² и среднюю глубину $h = 1{,}5$ м? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), плотность $\rho = 10^3$ кг/м³.

5(5). Для измерения температуры воды, имеющей массу $m = 66$ г, в нее погрузили термометр, который показал $t_1 = 32{,}4$ °С. Какова действительная температура воды, если теплоемкость термометра $C = 1{,}9$ Дж/К и перед погружением в воду он показывал температуру $t_2 = 17{,}8$ °С? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К).

6(3). Нагретая железная болванка массой $M = 3{,}3$ кг ставится на поверхность льда, имеющего температуру 0 °С. После охлаждения болванки до 0 °С под ней расплавилось $m = 460$ г льда. Какова была температура нагретой болванки? Рассеяние тепла в окружающую среду не учитывать. Удельная теплоемкость железа $c = 460$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

7(4). Для приближенного определения удельной теплоты парообразования воды ученик проделал следующий опыт. На электроплитке он нагрел воду, причем оказалось, что на нагревание ее от $t_1 = 10$ °С до $t_2 = 100$ °С потребовалось $\tau_1 = 18$ мин, а для обращения $k = 0{,}2$ ее массы в пар — $\tau_2 = 23$ мин. Какова удельная теплота парообразования воды по данным опыта? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К).

8(10). Молекулярный водород, масса которого $m = 6{,}5$ г и температура $t = 27$ °С, нагревают при постоянном давлении так, что его объем увеличивается вдвое. Найдите работу, совершаемую газом при расширении. Молярная масса водорода $M = 2$ г/моль.

9(9). Для изобарного нагревания $\nu = 800$ моль газа на $\Delta T = 500$ К газу сообщили количество теплоты $Q = 9{,}4$ МДж. Определите работу газа и приращение его внутренней энергии.

10(5). Вычислите работу, которую совершит газ при изобарном нагревании от $t_1 = 20$ °С до $t_2 = 100$ °С, если он находится в вертикальном сосуде, закрытом подвижным поршнем сечением $S = 20$ см² и массой $m = 5$ кг. Первоначальный объем газа $V = 5 \cdot 10^{-3}$ м³, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

11(13). Определите разность уровней ртути в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами каналов $d_1 = 1$ мм и $d_2 = 3$ мм. Плотность ртути $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м³, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0{,}47$ Н/м, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с².

12(7). Какую работу надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом $r = 4$ см? Для мыльного раствора коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0{,}04$ Н/м.

Основы электродинамики

1(13). Два положительных заряда $q_1 = q$ и $q_2 = 4q$ находятся один от другого на расстоянии $l = 3$ м. На каком расстоянии от заряда q_1 находится точка, напряженность электрического поля в которой равна нулю?

2(4). В поле зарядов $+q$ и $-q$ помещают заряд $q/2$ сначала в точку C, а затем в точку D (рис. 5). Сравните силы (по модулю), действующие на заряд, если $DA = AC = CB$.

3(1). Положительно заряженный шар радиусом $R = 5$ см создает в точке A на расстоянии $r = 1$ м от центра шара поле напряженностью $E = 1$ В/м. Чему равен потенциал поверхности шара? Какова работа внешних сил, необходимая для того, чтобы заряд $q = 10^{-6}$ Кл перенести из точки A в точку B, отстоящую на $l = 10$ см от центра шара?

4(5). Электрон влетает в плоский конденсатор длиной $L = 5$ см под углом $\alpha = 30°$ к поверхности пластин, а вылетает из него параллельно пластинам. Определите первоначальную энергию электрона в пучке, если напряженность электрического поля внутри конденсатора $E = 600$ В/см. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

---

*) Здесь и далее считается известной универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль· К).

5(11). Конденсатор емкостью C, заряженный до разности потенциалов $U_1=40$ В, соединяется одноименно заряженными обкладками с конденсатором емкостью $2C$, заряженным до напряжения $U_2=400$ В. Определите напряжение на конденсаторах после соединения.

6(3). Три одинаковых резистора, включенных последовательно, имеют полное сопротивление $R_1=9$ Ом. Чему будет равно сопротивление, если эти же резисторы включить параллельно?

7(7). Какое сопротивление R_x надо включить между точками A и B (рис. 6), чтобы сопротивление всей цепи было $R=10$ Ом? Остальные сопротивления равны: $R_1=R_4=3$ Ом, $R_2=R_3=10$ Ом.

8(10). Вольтметр, соединенный последовательно с резистором сопротивлением $R=3\cdot10^4$ Ом, при подключении к источнику тока с напряжением $U_0=120$ В показал $U=20$ В. Определите сопротивление вольтметра.

9(11). Источник тока с внутренним сопротивлением $r=4$ Ом подключили к резистору сопротивлением $R=6$ Ом. Напряжение на зажимах источника оказалось равным $U=18$ В. Определите ЭДС источника и его КПД.

10(5). В схеме, приведенной на рисунке 7, ЭДС батареи $\mathscr{E}=120$ В, $R_1=25$ Ом, $R_2=R_3=100$ Ом. Найдите мощность, выделяющуюся на резисторе сопротивлением R_1. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

11(12). Две электрические лампочки, соединенные параллельно, подключены к источнику питания. Сопротивление первой лампочки $R_1=360$ Ом, второй — $R_2=240$ Ом. Во сколько раз мощность, которую выделяет вторая лампочка, больше мощности, выделяемой первой лампочкой?

12(1). Как при параллельном, так и при последовательном соединении двух одинаковых аккумуляторов на внешнем сопротивлении выделилась мощность $P=80$ Вт. Какая мощность будет выделяться на этом сопротивлении, если замкнуть на него лишь один из аккумуляторов?

13(12). В калориметр массой $m_1=200$ г с удельной темплоемкостью $c_1=400$ Дж/(кг·К) налито $m_2=0{,}3$ кг жидкости с удельной теплоемкостью $c_2=2000$ Дж/(кг·К) и опущена спираль сопротивлением $R=5$ Ом. Сколько времени следует пропускать через спираль ток $I=2$ А, чтобы температура в калориметре повысилась на $\Delta T=2{,}5$ К?

14(12). При электролизе раствора серной кислоты за $\tau=50$ мин выделилось $m=0{,}3$ г водорода. Определите мощность, расходуемую на нагревание электролита, если его сопротивление $R=0{,}4$ Ом. Электрохимический эквивалент водорода $k=0{,}01\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

15(4). Деталь надо покрыть слоем хрома толщиной $d=50$ мкм. Сколько времени потребуется для покрытия, если норма плотности тока (отношение силы тока к площади поперечного сечения проводника) при хромировании $j=2$ кА/м^2? Плотность хрома $\rho=7200$ кг/м^3, электрохимический эквивалент $k=0{,}18\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

16(11). Электролиз подкисленной воды при нормальных условиях длится $\tau=5\cdot10^4$ с, при этом выделяется $V=10^{-3}$ м^3 кислорода. Определите силу тока, проходящего через воду, если плотность кислорода $\rho=1{,}4$ кг/м^3, а электрохимический эквивалент $k=8\cdot10^{-8}$ кг/Кл.

17(12). Под влиянием однородного магнитного поля в нем движется с ускорением $a=2$ м/с^2 прямолинейный проводник поперечным сечением $S=1$ мм^2. Направление проводника перпендикулярно линиям индукции, и по проводнику течет ток $I=1$ А. Плотность материала проводника $\rho=2{,}5\cdot10^3$ кг/м^3. Определите индукцию магнитного поля.

18(10). Проводник длиной $l=2$ м движется со скоростью $v=10$ м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину индукции магнитного поля, если на концах проводника возникает разность потенциалов $U=0{,}02$ В.

Колебания и волны

1(4). Груз массой $m=400$ г совершает колебания на пружине жесткостью $k=250$ Н/м. Амплитуда колебаний $x_m=15$ см. Найдите наибольшую скорость движения груза.

2(11). Шарик, подвешенный на пружине, сместили на расстояние $a=0{,}01$ м вниз от положения равновесия и отпустили. Какой путь пройдет шарик за $t=2$ с, если частота колебаний этой системы $\nu=5$ Гц? Затуханием пренебречь.

3(5). От груза, висящего на пружине жесткостью k, отделяется его часть массой m. На какую максимальную высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза? Ускорение свободного падения равно g, сопротивлением воздуха пренебречь.

4(13). Зависимость силы тока (в амперах) от времени в колебательном контуре описывается уравнением $i=0{,}1\sin 300\pi t$. Найдите индуктивность контура, если максимальная энергия электрического поля конденсатора $W_m=0{,}005$ Дж.

5(12). Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L=10^{-3}$ Гн и конденсатора емкостью $C=10^{-5}$ Ф. Конденсатор заряжен до максимального напряжения $U_m=100$ В. Определите максимальную силу тока в контуре при свободных колебаниях в нем.

6(7). Будут ли колебательные контуры настроены в резонанс, если их параметры таковы: $C_1=120$ пФ, $L_1=3{,}5$ мГн, $C_2=150$ пФ, $L_2=5$ мГн? Как нужно изменить емкость C_2 или индуктивность L_2, чтобы контуры были настроены в резонанс?

7(3). Ток в первичной обмотке трансформатора $I_1=0{,}5$ А, напряжение на ее концах $U_1=220$ В. Во вторичной обмотке ток $I_2=11$ А, напряжение — $U_2=9{,}5$ В. Определите КПД трансформатора.

8(3). Звуковые волны из воздуха распространились в воду. Длина волны звука в воздухе $\lambda_1=1$ м. Какова длина волны звука в воде? Скорость звука в воде $v_2=1{,}36\cdot10^3$ м/с, в воздухе — $v_1=0{,}34\cdot10^3$ м/с.

Оптика

1(10). Луч света падает на плоскую стеклянную пластину под углом $\alpha=50°$. На

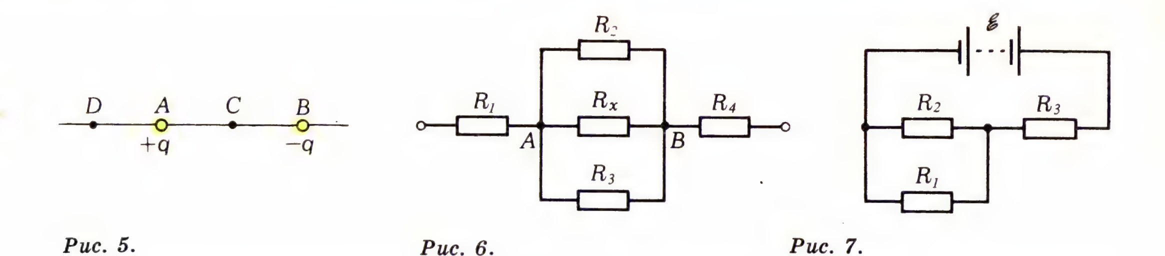


Рис. 5. Рис. 6. Рис. 7.

сколько сместится выходящий из пластины луч, если толщина ее $d=17{,}2$ мм? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

2(12). Действительное изображение миллиметрового деления шкалы, расположенной перед линзой на расстоянии $d=12{,}5$ см, имеет на экране размер $H=8$ см. На каком расстоянии от линзы находится экран?

3(11). Собирающая линза дает на экране резкое изображение предмета, которое в $\Gamma=2$ раза больше самого предмета. Расстояние от предмета до линзы на $a=6$ см превышает ее фокусное расстояние. Определите расстояние от линзы до экрана.

4(4). В главном фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием F поместили рассеивающую линзу. Предмет находится по другую сторону от собирающей линзы на расстоянии $3F$ от нее. Найдите фокусное расстояние рассеивающей линзы, если данная система дает действительное и в два раза увеличенное изображение предмета.

Квантовая физика

1(3). Красной границе фотоэффекта для калия соответствует длина волны $\lambda_{max}=6{,}2\cdot10^{-7}$ м. Найдите работу выхода (в электронвольтах) электронов из калия.*)

2(4). На один из вольфрамовых электродов ($A_{вых}=4{,}5$ эВ) двухэлектродного стеклянного баллона падает пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda=10^{-7}$ м. Между электродами приложено тормозящее напряжение $U=-10$ В. На каком расстоянии от первого электрода скорость фотоэлектронов уменьшится до нуля, если расстояние между электродами $d=40$ см? Электрическое поле внутри баллона считать однородным.

3(13). При освещении пластинки, изготовленной из некоторого металла, светом с частотой $\nu_1=8\cdot10^{14}$ Гц, а затем $\nu_2=6\cdot10^{14}$ Гц обнаружили, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов изменилась в 3 раза. Определите работу выхода (в электронвольтах) электронов из этого металла.

4(4). Пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda=10^{-7}$ м передает металлической поверхности мощность $P=10^{-6}$ Вт. Определите силу возникшего фототока, если фотоэффект вызывает $\eta=1\ \%$ падающих фотонов.

5(11). Частота кванта света $\nu=5\cdot10^{14}$ Гц. Определите длину волны, энергию и массу кванта.

6(13). Атомный реактор приводит в действие турбогенератор мощностью $P=2\cdot10^{8}$ Вт. Определите КПД турбогенератора, если за время t, равное суткам, расход урана $^{235}_{92}U$ составляет $m=0{,}54$ кг, а при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, в среднем равная $W=3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж. Постоянная Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Публикацию подготовили А. А. Егоров, В. А. Тихомирова

*) Здесь и далее считаются известными постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c=3\cdot10^{8}$ м/с и заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Газ на дисплее

(Начало см. на с. 61)

Например, сюда можно заложить «S» — останов, затем «R» — пуск; «B» — цикл замены всех скоростей на противоположные и изменение основного цвета палитры; «>» — удвоение TØ; «<» — уменьшение TØ вдвое (если такая операция меняет TC, то управление после нее надо передавать на расчет ближайшего соударения); «Ø» — передача управления на блок подготовки экрана (очистка экрана); «E» — конец работы и другие команды управления режимом работы модели. Звуковой эффект в момент столкновения оживит модель. В общем, здесь все зависит от вас и вашего компьютера.

Ответы, указания, решения

У попа была собака...

1. Десятичное число, которое показывает, сколько в нем единиц, двоек,..., нулей, равно 2 100 010 006.

2. В качестве последнего замечания автор просто переписал перевод предпоследнего. Тем самым, это последнее замечание уже не переводилось на иностранный язык и благодарить за него переводчика не было необходимости.

Избранные школьные задачи

1. 4. Р е ш е н и е. Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$ — наши 5 чисел. Сумма 10 разностей x_2-x_1, $x_3-x_1, \ldots, x_5-x_4$ равна, как показывает подсчет,

$$4x_5+2x_4-2x_2-4x_1,$$

и ясно, что

$$4x_5+2x_4-2x_2-4x_1 \leqslant 4(x_5+x_4+x_3+x_2+x_1)=4.$$

Значение 4 достигается при $x_5=1$, $x_4=\ldots=x_1=0$.

2. Умножая правую часть второго равенства на $abc=1$, получаем $a+b+c=bc+ac+ab$, $abc-bc-ac-ab+a+b+c-1=0$, $(a-1)(b-1)(c-1)=0$, т. е. по крайней мере одно из чисел a, b, c равно 1.

3. (2,2,5). Р е ш е н и е. Числа x и z имеют разную четность, значит, меньшее из них, т. е. x, равно 2. Если y нечетно, то 2^y+1 делится на 3 (докажите!), причем уже $2^3+1=9>3$. Значит, y четно, т. е. $y=2$ и $z=5$.

4. Поскольку $AF \parallel CD$ и $AD=CF$, четырехугольник $ACDF$ есть равнобочная трапеция или прямоугольник. Отсюда $\angle FCD=\angle ADC$, и эти углы равны $\angle DAF=\angle CFA$. Аналогично выводятся равенства других четверок углов, которые на рисунке 1 обозначены буквами α, β, γ. Так как сумма углов выпуклого шестиугольника равна 4π, то $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Значит, $\angle CDA=\pi-\angle CBA$, и точка D лежит на окружности, проходящей через точки A, B, C. Точно так же доказывается, что точка E лежит на окружности, проведенной через точки B, C, D, и точка F лежит на окружности, проведенной через точки C, D, E. Значит, все 6 точек A, B, C, D, E, F лежат на одной окружности.

5. В прямоугольном треугольнике AB_1B (рис. 2) B_1C_2 — медиана, проведенная из вершины прямого угла, следовательно, $AC_2=B_1C_2$, $\angle C_2B_1A=\angle A=30^\circ$ и $\angle BC_2B_1=\angle A+\angle C_2B_1A=60^\circ$. Аналогично из треугольника AC_1C находим, что $\angle AC_1B_2=30^\circ$. Значит, в треугольнике OC_1C_2 $\angle C_1OC_2=180^\circ-\angle BC_2B_1-\angle AC_1B_2=90^\circ$.

6. Одно из чисел равно ± 2, остальные равны ∓ 1. Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(a-d)(b-c)=0$, т. е. $a=d$ или $b=c$. Аналогично $a=c$ или $b=d$. Мы видим, что во всех случаях три из наших четырех чисел равны. Пусть это — числа b, c, d. Тогда каждое из наших уравнений приобретает вид $ab+b^2=-1$, т. е. $b(a+b)=-1$. Значит, либо $b=1$, $a+b=-1$, либо $b=-1$, $a+b=1$.

7. Одно из чисел x, y, z равно 0, остальные равны 1. Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $x=1+\alpha$, $y=1+\beta$. Тогда $z=-(\alpha+\beta)$ и первое уравнение приобретает вид $(\alpha+1)^3+(\beta+1)^3-(\alpha+\beta)^3=2$, что после преобразования превращается в

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta),$$

или

$$\alpha+\beta=(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta-\alpha\beta).$$

Значит, $\alpha+\beta$ делится на $\alpha+\beta+2$. Это оставляет

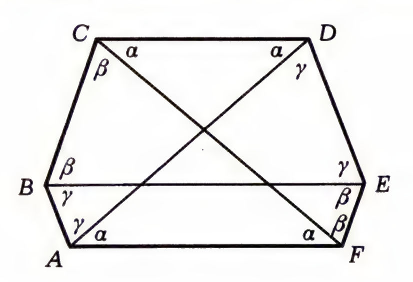


Рис. 1.

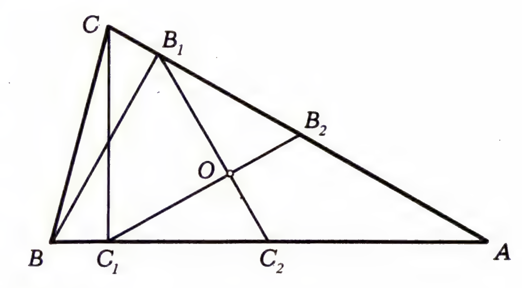


Рис. 2.

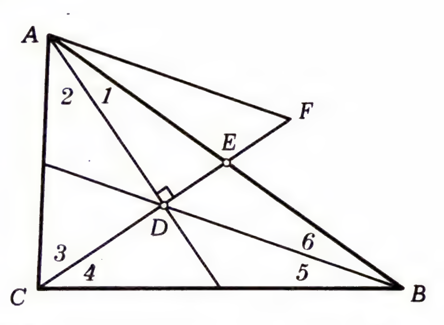


Рис. 3.

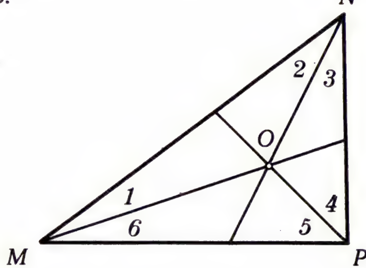


Рис. 4.

для $\alpha+\beta$ четыре возможных значения: 0, -1, -3, -4. Для каждого из них из последнего уравнения можно найти $\alpha\beta$, а затем α и β. Из найденных решений оставляем целые.

8. Остроугольный. Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, медианы, проведенные из вершин A, B, C, имеют длину 4, 5, 3. Продолжим медиану CE на отрезок EF, равный DE (рис. 3). Стороны треугольника ADF равны 2/3 от 3, 4, 5. Далее, AE — медиана треугольника ADF; констатируем, что угол BAD между медианой и стороной треугольника ABC равен углу между медианой и стороной треугольника ADF и, значит равен углу OMN между медианой и стороной треугольника MNP на рисунке 4 со сторонами 3, 4, 5. Аналогичное верно для других углов между медианами и сторонами треугольников ABC и MNP; на рисунках 3 и 4 равные углы обозначены одинаковыми цифрами. Мы видим, что углы треугольника ABC соответственно равны $\pi-\angle MON$, $\pi-\angle POM$, $\pi-\angle NOP$. Простое вычисление дает: $OM=\frac{2}{3}\sqrt{16+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{73}}{3}$, $OP=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{3}$, $ON=\frac{2}{3}\sqrt{4+9}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$. Таким образом, $ON^2+OP^2\angle NP^2$, $OP^2+OM^2\angle PM^2$, $OM^2+ON^2\angle MN^2$. Значит, углы NOP, POM и MON тупые, а углы треугольника ABC острые.

9. Заметим, что из четырех описанных преобразований только отражение относительно прямой BC может изменить расстояние от точки M до точки A. Поскольку в результате применения всех этих преобразований точка M перешла в себя, то и отражение относительно BC не меняло этого расстояния, а это возможно лишь в том случае, когда это отражение оставило соответствующую точку на месте. Следовательно, точка M переходит в себя при последовательном применении отражений относительно прямых AB, AC и симметрии относительно точки A. Поскольку применение двух указанных отражений — это просто поворот относительно A на удвоенный угол φ между этими прямыми, а симметрия — поворот на угол π, то точка M перешла в себя при повороте относительно A на угол $2\varphi+\pi$. Значит, угол φ между прямыми AB и AC равен $\pi/2$.

10. 6. Решение. Нетрудно привести пример ломаной из шести звеньев, содержащей данные десять точек. Предположим, что эти точки можно разместить и на пятизвенной ломаной. На некотором ее звене лежат две (из шести) середины ребер тетраэдра, значит, на этом звене других отмеченных точек нет, а на смежном с ним звене их также не более двух. Таким образом, два эти звена проходят через три данные точки. Оставшиеся же три звена содержат не более шести других данных точек: три концевые точки и три внутренние точки.

11. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+ax+b=0$. Парабола $y=x^2+ax+b$ пересекает ось Ox в точках $A(x_1;\ 0)$ и $B(x_2;\ 0)$ и ось O_y — в точке $C(0;\ x_1,\ x_2)$. Окружность, проведенная через точки A, B, C, проходит также через точку $D(0;\ 1)$, потому что $OA\cdot OB=OC\cdot OD$ (точка O — начало координат).

12. Возьмем натуральное число m, большее любого из решений уравнения $p(x)=0$ и большее $-a/2$, и положим

$$N=p(m+1)p(m+2)...p(m+1989)+m.$$

Так как разность $p(c)-p(d)$ делится на $c-d$, разность $p(N+n)-p(m+n)$ делится на $N-m$, и если $1\leqslant n\leqslant 1989$, то $p(N+n)$ делится на $p(m+n)$. В то же время $p(N+n)>p(m+n)$, потому что $p(x)$ возрастает при $x>m$. Значит, $p(N+n)$ — составное число. (Это рассуждение применимо к любому многочлену степени $\geqslant 1$ с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом; оно показывает, что для любого такого многочлена найдется сколь угодно много последовательных натуральных чисел, значения многочлена в которых являются составными числами.)

13. Перепишем уравнение в виде

$$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0.$$

По условию $f(a)=(a-b)(a-c)>0$, $f(b)=(b-a)(b-c)<0$, $f(c)=(c-a)(c-b)>0$, следовательно, на отрезках $[a;\ b]$ и $[b;\ c]$ имеется по крайней мере по одному корню уравнения $f(x)=0$. Но так как $f(x)$ — квадратный трехчлен, уравнение не может иметь больше двух решений.

14. Примем длины отрезков AD, BD, CD за единицу. Ясно, что квадрат длины любого из отрезков AB, AC, BC больше двух и меньше четырех. Поэтому сумма квадратов двух сторон треугольника ABC больше квадрата третьей стороны, т. е. треугольник остроугольный.

15. Пусть O — точка пересечения указанных прямых, K, L, M, N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O соответственно на ребра AB, AC, CD, BD тетраэдра $ABCD$. Пусть, далее, E — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Ясно, что K, L — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC треугольника ABC (сделайте рисунок). Поэтому $AK=AL$. Аналогично $BK=BN$, $CM=CL$, $DM=DN$. Значит, $AB+CD=AC+BD$. Точно так же доказывается, что $AB+CD=AD+BC$.

Закон сохранения энергии в электростатике

1. $A=CU^2$ (весь заряд оказывается на конденсаторе, пластины которого не раздвигали).

2. $Q=CU^2/6$ (в первый момент после разведения пластин замкнутыми друг на друга оказываются конденсатор емкостью C с напряжением U и конденсатор емкостью $C/2$ с напряжением $2\ U$).

3. $A_{min}=\mathscr{E}\varepsilon_0 Sd_1/(2d\ (d\ d_1))$ (минимальная работа по удалению плиты равна разности изменения энергии конденсатора и работы батареи).

4. $Q=A_{\min}=\varepsilon_0 E^2 Sd/2$ (сразу после выключения внешнего поля в пластине есть поле поляризационных зарядов, напряженность которого равна E; удаление пластины из поля эквивалентно созданию поля с напряженностью E в объеме пластины).

5. $k=CU^2/d^2$ (результат получается из закона

сохранения энергии $kx_0^2/2+CU^2/2=k(x_0+$ $+d)^2/2-mgd$ и из условия равновесия пластины $kx_0=mg$).

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1988 году

Математика

Алгебра

1. 4. **2.** 7. **3.** 24. **4.** 81. **5.** 13,5 кг. **6.** 3/5. **7.** 100 км/ч, 65 км/ч. **8.** 5 ч, 3 ч 20 мин. **9.** 115, 132. **10.** 25 %. **11.** 28: 9. **12.** 34. **13.** 2; 1/2 и 6; —1/2. **14.** 1, 1/3. **15.** 13 ч 30 мин. **16.** 14 ч 30 мин. **17.** 1 кг апельсинов стоит 3,5 р., 1 кг мандаринов — 4,25 р., 1 кг грейпфрутов — 4,5 р. **18.** Коробка с печеньем весит 5,2 кг, с пряниками — 7,2 кг, с вафлями — 5,6 кг. **19.** а) 1; б) 2,4; в) 4; г) 10; д) 1/2; е) 4; ж) —1; з) 1; и) 1; к) —1; л) 2. **21.** $(\sqrt{5}-1)/4$. **22.** См. рис. 5. **23.** а) 4,5; б) —2; в) —1; 2; г) 16; 21; д) —1; е) 10; ж) 1; з) 1/125; 25; и) 1/3; 3; к) 1; 2; л) ± 3; м) 3; 4; н) $\pi n/5$; $\pi(2n+1)/6$, $n\in \mathbf{Z}$; о) $\pi(2n+1)/10$, $\pi(2n+1)/6$, $n\in \mathbf{Z}$; п) $2\pi n$, $(4n+1)\pi/2$, $n\in \mathbf{Z}$; р) $2\pi(3n+1)/3$, $\pi(4n-1)/2$, $\pi(6n+1)/3$, $n\in \mathbf{Z}$; с) 6; т) $(6n\pm 1)\pi/6$, $n\in \mathbf{Z}$; у) $-\pi$; 0; π. **24.** а) $(-\infty; -2]\cup(1; 4)\cup\{0\}$; б) $[4; 5)\cup(5; \infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 5/2]$; г) $[-0,3; (3+\sqrt{13})/2]\cup\{(3-\sqrt{13})/2\}$; д) $[3; \infty)$; е) $(-\infty; -3/2]\cup[3/2; \infty)$; ж) $[-1; 0)\cup(1; 2)$; з) $(0; +\infty)$; и) $[-1; 0)\cup(2; 3]$; к) $(-1; -\pi/4)\cup$ $\cup(-\pi/4; \pi/4)\cup(\pi/4; 3\pi/4)$, $\cup(3\pi/4; 3]$; л) $(-\infty; -1)\cup(4; \infty)$; м) $(2,5; \infty)$; н) $(-3/5; 2)$. **25.** $[5; 6]$. **26.** $[4-\sqrt{2}; 3)\cup[4+\sqrt{2}; \infty)$. **27.** а) (2; 1); б) (4; 1); в) (1; 2); (16; —28); г) (2; 0); д) (2; 2). **28.** $x=-1$. **29.** $a=-4$. **30.** $p=2$. **31.** $c=3$. **32.** $a<0$. **33.** $b=1$.

Анализ

1. а) См. рис. 6; б) см. рис. 7; в) см. рис. 8. **2.** 2. **3.** В третьей четверти. **4.** $(\pi k; 0)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi k, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi k, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $k\in \mathbf{Z}$. **5.** 1. **6.** 4. **7.** $8\sqrt{2}$. **8.** —24. **9.** $y_{\min}=y(3)=-8$. **10.** $[2\sqrt{3}; \infty)$.

Геометрия

1. (3; —1). **2.** 2. **4.** 1. **5.** 3. **6.** $2R\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $4R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$. **7.** 12. **8.** 8/9. **9.** 22,5°, 67,5°, 90°. **11.** $\sqrt{3}$. Точка O — вне треугольника. **12.** 2. **13.** $\sqrt{3}$. **14.** 25. **15.** $3(7+\sqrt{3})/2$. **16.** 8. **17.** 7,5. **18.** 48. **19.** 144. **20.** 96. **21.** $2\arccos\frac{l(b+c)}{2bc}$. **22.** 4. **23.** $25\sqrt{3}$. Точка O — внутри треугольника ABC. **24.** 36 %. **25.** 45. **26.** —1/3. **27.** $2(l^2-b^2)\sqrt{4b^2-l^2}/9\sqrt{3}$. **28.** 84. **29.** $48\sqrt{2}+16\sqrt{3}(2-\sqrt{2})$. **30.** 36. **31.** $S\sqrt{1+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha}$. **32.** 120°. **33.** 60°. **34.** $\pi Q\sqrt{Q}/(4\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})$. **35.** $\sqrt{69}/8$. **36.** $\sqrt{481}/2$.

Физика

Механика

1. $t=l/(v_1+v_2)=5$ с.

2. $v_{\text{ср}}=\dfrac{l}{(2l_1/l_2+1)t}=12$ м/с.

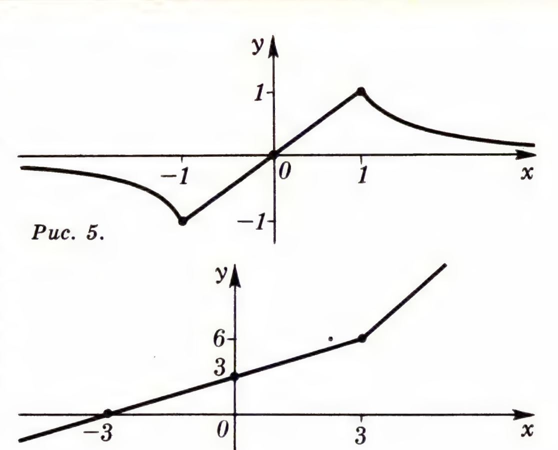


Рис. 5.

Рис. 6.

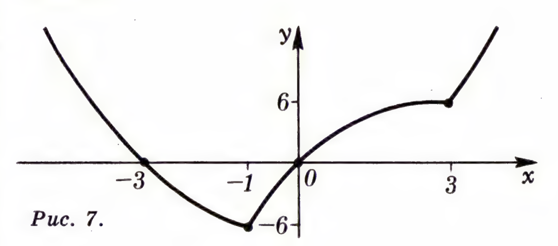


Рис. 7.

Рис. 8.

3. См. рис. 9; $l=at^2/4=16$ м.
4. Время движения второго тела больше.
5. $h=233,1$ м.
6. $l=gt_1(t_2-t_1/2)=15$ м.
7. $h=2v(v_0-v)/g=680$ м.
8. $h=(v_0^2\sin^2\alpha)/(2g)=5$ м; $l=(v_0^2\sin 2\alpha)/g=34$ м; $\Delta P=2mv\sin\alpha=10$ кг·м/с.
9. $T=m(g-a)=5$ Н.
10. $a=(F/m)(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)-\mu g$, если $F\cos\alpha>\mu(mg+F\sin\alpha)$; $a=0$, если $F\cos\alpha\leqslant\mu(mg+F\sin\alpha)$.
11. $m=2Mv^2/(2lg-v^2)=0,25$ кг.
12. $a=v^2/R=2,5$ м/с²; $F=m(g-v^2/R)=15$ кН.
13. $T=(mg\cos\alpha)/2=125$ Н.
14. $h=5/3\ R$.
15. $F=\dfrac{mg}{l}\left(\dfrac{h}{\mu}-\sqrt{l^2-h^2}\right)=0,8$ Н.
16. $N=\mu mgv=20$ кВт.
17. $l=v_0^2/(2\mu_1 g)$ при $v_0<\sqrt{2\mu_1 ga}$; $l=v_0^2/(2\mu_2 g)+(\mu_2-\mu_1)a/\mu_2$ при $v_0>\sqrt{2\mu_1 ga}$.

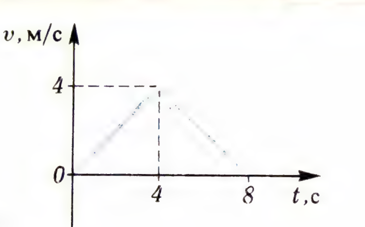


Рис. 9.

18. $E_k=m(gH+v_0^2/2)=68$ Дж.
19. $Q=m(gh-v^2/2)=6$ Дж; $\mu=(gh-v^2/2)/(gl\cos\alpha)=0{,}22$.
20. $\Delta T=9v^2/(8c)=0{,}7$ К.
21. $x=(\sqrt{n}-1)/(\sqrt{n}+1)$.
22. $\Delta T=gh/(2c)=0{,}2$ К.
23. $E_1=E_0/4$; $E_2=3E_0/4$.
24. Уровень воды и давление на дно изменяться не будут.
25. Нет, нельзя.
26. $m_{max}=(\varrho_в-\varrho_б)lS=70$ кг.
27. $T=\varrho_в gS\Delta h$.
28. $h=2(\varrho_в/\varrho_д-1)h_2-h_1=10$ см.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $\varrho=pM/(RT)=0{,}16$ кг/м^3.
2. $T_1=T_2M_1/M_2=280$ К; $t_1=7$ °С.
3. $\alpha=(1-p_2/p_1)\,100\,\%=20\,\%$.
4. $Q=c\varrho Sh\Delta t=2{,}6\cdot10^9$ Дж.
5. $t=t_1+C(t_1-t_2)/cm=32{,}5$ °С.
6. $t=m\lambda/(cM)=100$ °С.
7. $\lambda=c(t_2-t_1)\tau_2/(k\tau_1)=2{,}4\cdot10^6$ Дж.
8. $A=mRT/M=8{,}1$ кДж.
9. $A=\nu RT=3{,}3$ МДж; $\Delta U=Q-A=6{,}1$ МДж.
10. $A=(p_0+mg/S)V(T_2/T_1-1)=170$ Дж.
11. $\Delta h=4\sigma(d_2-d_1)/(\varrho g d_1 d_2)=9{,}5$ мм.
12. $A=8\pi\sigma r^2=1{,}6\cdot10^{-3}$ Дж.

Основы электродинамики

1. $x=l/3=1$ м.
2. $F_C/F_D=2{,}25$.
3. $\varphi_ш=Er^2/R=20$ В;
$A=qEr(r-l)/l=9\cdot10^{-6}$ Дж.
4. $W_0=eEl/\sin 2\alpha=5{,}6\cdot10^{-18}$ Дж.
5. $U=(U_1+2U_2)/3=280$ В.
6. $R_2=R_1/9=1$ Ом.
7. $R_x=\dfrac{R_2R_3(R-R_1-R_4)}{R_2R_3-(R_2+R_3)(R-R_1-R_4)}=20$ Ом.
8. $R_V=UR/(U_0-U)=6\cdot10^3$ Ом.
9. $\mathcal{E}=U(R+r)/R=30$ В; $\eta=R/(R+r)=0{,}6=60\,\%$.
10. $P_1=\dfrac{\mathcal{E}^2R_1R_2^2}{(R_3(R_1+R_2)+R_1R_2)^2}=16$ Вт.
11. $P_2/P_1=R_1/R_2=3/2$.
12. $P'=9P/16=45$ Вт.
13. $\tau=(c_1m_1+c_2m_2)\Delta T/(I^2R)=85$ с.
14. $P=m^2R/(k^2\tau^2)=40$ Вт.
15. $\tau=\varrho d/(kj)=16{,}7$ мин.
16. $I=\varrho V/(k\tau)=0{,}35$ А.
17. $B=\varrho aS/I=5\cdot10^{-3}$ Тл.
18. $B=U/(lv)=10^{-3}$ Тл.

Колебания и волны

1. $v_m=\sqrt{k/m}\,x_m=3{,}75$ м/с.
2. $l=4t\nu a=0{,}4$ м.
3. $h_{max}=2mg/k$.
4. $L=2W_m/I_m^2=1$ Гн (здесь $I_m=0{,}1$ А).
5. $I_m=\sqrt{C/L}\,U_m=10$ А.
6. Резонанс наступит, если емкость C_2 уменьшить на 66 пФ.
7. $\eta=I_2U_2/(I_1U_1)=0{,}95=95\,\%$.
8. $\lambda_2=\lambda_1 v_2/v_1=4$ м.

Оптика

1. $x=d\sin\alpha\left(1-\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)=6{,}7$ мм.
2. $f=dH/h=10$ м (здесь $h=1$ мм).
3. $f=a\Gamma(\Gamma+1)=0{,}36$ м.
4. $F'=-(2/3)F$.

АНКЕТА 6-89

Дорогой читатель!

Ежегодно в последнем номере журнала мы помещали «Нашу анкету». Но нам пришло в голову, что легче, проще высказать свое мнение, что называется, по свежим следам. Поэтому мы решили помещать анкету раз в квартал.

Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 6—89».

Очень надеемся на обратную связь.

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______

Ваша профессия (если Вы работаете): ______

Круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______

Квантовая физика

1. $A_{вых}=hc/\lambda_{max}=2$ эВ.
2. $x=(hc/\lambda-A_{вых})d/(eU)=32$ см.
3. $A_{вых}=(3\nu_2-\nu_1)h/2=2{,}1$ эВ.
4. $I=\eta e\lambda P/(hc)=8\cdot10^{10}$ А.
5. $\lambda=c/\nu=6\cdot10^{-7}$ м; $E=h\nu=3{,}3\cdot10^{-19}$ Дж; $m=h\nu/c^2=3{,}7\cdot10^{-36}$ кг.
6. $\eta=(PMt/(mN_AW))100\,\%=39\,\%$ (здесь $M=0{,}235$ кг/моль — молярная масса урана).

АНКЕТА 6-89

3. Какие статьи и задачи из номеров 4—6 (номер укажите) Вам понравились? ______

Вы использовали при подготовке к уроку? ______

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?
Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? ______

5. Вам больше всего понравилась обложка номера, иллюстрация из номера, страница ______

6. Ваши общие замечания и пожелания: ______

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Н. Дронова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 28.04.89. Подписано к печати 18.05.89
Т-10927. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл.-кр. отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,05. Тираж 187 954 экз.
Заказ 631. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Быстродействие галогеносеребряных стекол для солнцезащитных очков измеряется минутами. При такой скорости реакции изменение окраски фотохромного костюма не поспевало бы за изменениями освещенности, возникающими при движении. Но в более совершенных фотохромных системах — например, в стеклах очков для защиты глаз от вспышки, сопровождающей ядерный взрыв,— продолжительность реакции уменьшается до микросекунд. Системы с подобными свойствами прекрасно подошли бы для фотохромного костюма.

Роль светотени в зрительном восприятии подробно обсуждалась Дж. Беком (Scientific American, Aug. 1975, p. 62); объект, не подчиняющийся обычным законам распределения света и тени, очень трудно, а порой невозможно распознать, как бы пристально мы ни разглядывали его. Глаз не в состоянии определить фактуру поверхности и форму без привычных переходов светотени. Представьте себе теперь комнату, стены, пол и потолок которой оклеены фотохромными обоями. Каким бы ярким ни было освещение, любой фотохромный объект, помещенный в эту комнату, окажется невидимым, поскольку между ним и фоном не будет контраста. Какой простор для иллюзионистов!



Нам пишут

Новые приближения числа π

Читателям «Кванта» хорошо известно, что задача о квадратуре круга, т. е. построении квадрата, равновеликого данному кругу, неразрешима посредством циркуля и линейки. Это означает, что, располагая единичным отрезком, невозможно построить отрезок длиной π. Поэтому задача построения отрезков, длины которых хорошо приближают число $\pi \approx 3{,}1415926...$, давно интересует математиков.

Вот несколько классических приближений π:

$22/7 = 3{,}1428571...$ (Архимед, 287—212 гг. до н. э.);

$355/113 = 3{,}1415929...$ (А. Меций, Голландия, 1543—1620);

$$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}1415333...$$

(А. Коханский, Польша, 1631—1700);

$$\sqrt{9-3\sqrt{6}} + \sqrt{1+\sqrt{6}} = 3{,}1423991...$$

(Л. Маскерони, Италия, 1750—1800).

Оцените сами точность этих приближений и подумайте, как построить соответствующие отрезки циркулем и линейкой.

Вот несколько приближений π, найденных автором:

$\sqrt{145} - 8{,}9 = 3{,}1415945...$;

$5\sqrt{2}/2 - 13/33 = 3{,}1415945...$;

$\sqrt{7\sqrt{2}} = 3{,}1463462...$;

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1462643...$;

$10\sqrt{2} - 11 = 3{,}1421356...$

А следующие два приближения π имеют «рекордную» точность:

$$\sqrt[4]{399550} - 22 = 3{,}1415926...$$

$$\sqrt[4]{97 + 9/22} = 3{,}1415926...$$

Несмотря на «ужасающий» вид, соответствующие отрезки нетрудно построить. Подсказка к построению первого отрезка — в равенстве:

$$\sqrt[4]{399550} = \sqrt{5}\sqrt{\sqrt{11^2+1^2}\cdot\sqrt{11^2+3^2+1^2}}.$$

Л. П. Купцов



Задачи

М1166 — М1170, Ф1173 — Ф1177

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1166» или «Ф1173». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1166—М1170 предлагались осенью прошлого года на математической олимпиаде «Турнир городов».

М1166. Докажите неравенство $a^2pq+b^2qr+c^2rp\leqslant 0$, где a, b, c — длины сторон треугольника, $p+q+r=0$.

Я. Ш. Мустафаев, ученик 10 кл., Баку

М1167. Сколько существует перестановок чисел 1, 2, ..., n, в которых для любого числа i, стоящего не на первом месте, хотя бы одно из чисел $i-1$ и $i+1$ находится левее i?

А. В. Анджанс

М1168*. В стране 1989 городов и 4000 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите, что можно выбрать кольцевой маршрут, проходящий не более чем через 20 городов.

А. А. Разборов

М1169. Пусть M — точка, лежащая внутри прямоугольника $ABCD$, S — его площадь. Докажите неравенство

$$S\leqslant AM\cdot CM+BM\cdot DM.$$

И. Я. Гольдшейд

М1170. Рассмотрим разбиения данного выпуклого n-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Назовем перестройкой следующее преобразование: вместо некоторой диагонали BC, служащей общей стороной двух треугольников ABC и BCD разбиения, проводится диагональ AD (рис. 1). Обозначим через $P(n)$ наименьшее число перестроек, за которое можно любое разбиение перевести в любое другое. Докажите оценки:

а) $P(n)\geqslant n-3$,

б) $P(n)\leqslant 2n-7$,

в)* $P(n)\leqslant 2n-10$ при $n\geqslant 13$.

Д. В. Фомин

Ф1173. Длинный игрушечный поезд, составленный из большого числа вагонов, едет с постоянной скоростью по горизонтальным рельсам, а потом въезжает в «мертвую петлю» (рис. 2). Длина поезда L, радиус петли R (R существенно больше размера вагона, но $L>2\pi R$). При какой начальной скорости поезд преодолеет препятствие так, что во время движения ни один вагон не перестанет давить на рельсы?

А. И. Буздин

Ф1174. В кубическом сосуде объемом $V=1$ л находится $m=0{,}01$ г гелия при температуре $T=300$ К. Понаблюдаем за одной из молекул. Сколько раз она ударится о верхнюю стенку сосуда за время $t=1$ мин?

А. Р. Зильберман

Ф1175. НЛО пролетает над Землей с постоянной очень большой скоростью $\vec{v}$. Какую скорость зафиксируют наземные приборы станции слежения в тот момент,

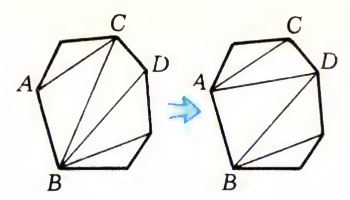


Рис. 1.

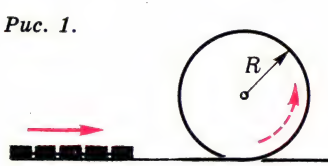


Рис. 2.

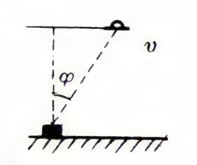


Рис. 3.

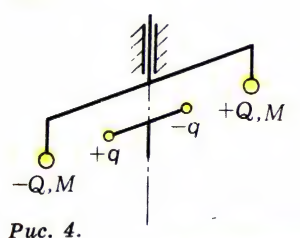


Рис. 4.

когда направление на объект будет составлять угол φ с вертикалью (рис. 3)?

С. С. Кротов

Ф1176. На невесомом коромысле длиной $2L$, которое может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, закреплены заряды $+Q$ и $-Q$ массой M каждый. Под коромыслом на продолжении оси вращения расположен маленький диполь — заряды $+q$ и $-q$ на расстоянии $2a$ друг от друга ($a \ll L$). В начальный момент коромысло находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 4).

а) Диполь приводят во вращение с угловой скоростью ω. При каких ω коромысло будет «сопровождать» вращение диполя?

б) Диполь неподвижен. Найти период малых колебаний коромысла.

А. В. Андрианов

Ф1177. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 1$ Гн с сопротивлением $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Конденсатор неидеален — сопротивление его изоляции R_x конечно. При какой величине R_x в катушке выделится в виде тепла 1/3 начальной энергии контура?

З. А. Рафаилов

Решения задач

М1141 — М1145, Ф1153 — Ф1157

М1141. *Трапеция описана около окружности. Докажите, что хотя бы одна из ее диагоналей образует с основанием угол не более 45°.*

Как и другие несложные геометрические задачи, эта задача допускает много решений. Приведем три из них.

В первых двух используется неравенство $m \geq 2r$, где m — средняя линия трапеции, а r — радиус вписанной окружности, т. е. $2r$ — высота трапеции (рис. 1).

Если диагональ составляет с основанием угол больше 45°, то ее проекция на основание меньше высоты $2r$ трапеции. Сумма проекций обеих диагоналей, очевидно, равна сумме оснований, т. е. $2m$. Поэтому если утверждение задачи не верно, то $2m < 2r + 2r = 4r$, что противоречит неравенству $m \geq 2r$.

Другое рассуждение: площадь трапеции, равная $2rm$, не превосходит $d_1 d_2/2$, где d_1 и d_2 — ее диагонали. Если $d_1 \geq d_2$, то $d_1^2/2 \geq d_1 d_2/2 \geq 2rm \geq 4r^2$. Следовательно, $2r/d_1 \leq \sqrt{2}/2$, а значит, диагональ d_1 составляет с основанием угол не более 45° (см. рис. 1).

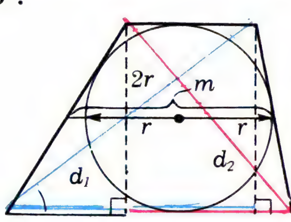


Рис. 1.

В третьем решении мы используем то, что боковые стороны трапеции видны из центра O ее вписанной окружности под прямым углом (так как O — точка пересечения биссектрис углов трапеции — рис. 2). Если бы утверждение задачи было неверным, то основания трапеции были бы видны из точки P пересечения диагоналей под острым углом, а боковые стороны — под тупым. Тогда точка P лежала бы внутри окружностей, построенных на боковых сторонах как на диаметрах,

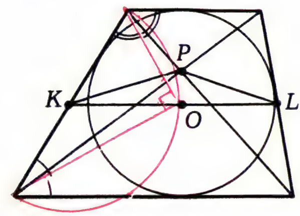


Рис. 2.

следовательно, выполнялись бы неравенства $PK < OK$, $PL < OL$, где K и L — центры этих окружностей, т. е. середины сторон. Но это противоречило бы неравенству треугольника $PK + PL > KL = KO + OL$.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский, Н. М. Седракян

М1142. *Таблица $m \times n$ заполнена mn числами так, что в каждой строке и в каждом столбце эти числа составляют арифметическую прогрессию. Сумма четырех чисел, стоящих в углах таблицы, равна s. Чему равна сумма всех чисел в таблице?*

Ответ: $smn/4$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — числа в верхней строке, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — в нижней. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = (a_1 + a_m)m/2$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_m = (b_1 + b_m)m/2$.

Суммы чисел в столбцах равны $(a_1 + b_1)n/2$, $(a_2 + b_2)n/2, \ldots, (a_m + b_m)n/2$. Сложив эти суммы, мы получим сумму всех чисел в таблице:

$$(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_m + b_m)n/2 = (a_1 + a_m + b_1 + b_m)mn/4 = smn/4.$$

Н. Б. Васильев

М1143. *Масса каждой из 101 гирьки, расположенных по окружности,— натуральное число, а их общая масса равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, с общей массой 200 г.*

Отметим на окружности 300 точек, разбивающих ее на 300 равных частей (по $1°12'$), и каждой гирьке массой m поставим в соответствие дугу из m таких частей; концы этих дуг (расположенных по окружности в том же порядке, что и гирьки) назовем красными точками, остальные $300 - 101 = 199$ точек — черными. Рассмотрим все равносторонние треугольники, вписанные в окружность, у которых одна из вершин — красная. Если бы у каждого из них две другие вершины оказались черными, то всего черных точек было бы не менее $2 \cdot 101 = 202$. Поэтому найдется треугольник, у которого две вершины — красные. Бо́льшая дуга (в $240°$) с концами в этих красных вершинах соответствует гирькам, в сумме имеющим массу 200 г, меньшая (в $120°$) — гирькам, имеющим массу 100 г.

В. В. Произволов

М1144. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа. Какое число больше:*

$$\sqrt[1988]{a_1^{1988} + a_2^{1988} + \ldots + a_n^{1988}}$$

или

$$\sqrt[1989]{a_1^{1989} + a_2^{1989} + \ldots + a_n^{1989}} ?$$

Ответ: Первое число больше, если хотя бы два из чисел a_i не равны 0 (что мы и будем предполагать в дальнейшем).

Докажем сразу более общее утверждение: функция $f(\alpha) = (a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha)^{1/\alpha}$, монотонно убывает при $\alpha > 0$, т. е. $f(\alpha) > f(\beta)$ при $0 < \alpha < \beta$.

Не ограничивая общности, можно считать, что a_1 — наибольшее из чисел a_i, $a_1 > 0$. Положим $x_i = a_i/a_1$, тогда при $\alpha < \beta$

$$f(\alpha) = a_1(1 + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha)^{1/\alpha} \geqslant a_1(1 + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta)^{1/\alpha} > a_1(1 + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta)^{1/\beta} = f(\beta),$$

поскольку $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ при всех i и суммы в скобках больше 1.

Интересно, что часто рассматриваемая величина $((a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha)/n)^{1/\alpha}$ — так называемое степенное среднее чисел $a_1, \ldots, a_n$ степени α — возрастает с ростом α.

А. И. Шехорский

М1145*. *Из точки P проведены две касательные PB и PC к окружности, причем $\angle BPC > 90°$. На меньшей дуге BC взята точка A. Докажите, что площадь треугольника, отсекаемого от угла BPC касательной к окружности в точке A, не превосходит площади треугольника ABC.*

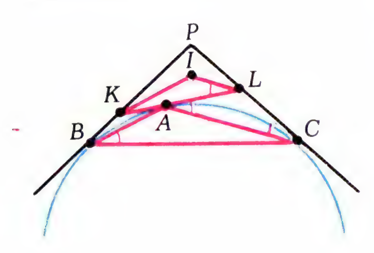


Рис. 1.

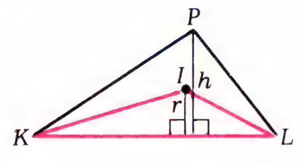


Рис. 2.

Обозначим отсекаемый от угла BPC треугольник через KPL (рис. 1), центр его вписанной окружности через I. Треугольники ABC и ILK подобны. Действительно, каждый из углов ABC, CAL и ACL равен половине угловой величины дуги AC (первый угол вписан в окружность и опирается на эту дугу, два других образованы хордой, стягивающей эту дугу и касательными в ее концах). Поэтому

$$2\angle ILK = \angle PLK = \angle LAC + \angle LCA = 2\angle ABC,$$

т. е. $\angle ILK = \angle ABC$. Аналогично, $\angle IKL = \angle ACB$. Коэффициент подобия треугольников ILK и ABC равен KL/BC, следовательно, отношение их площадей равно $S_{ILK}/S_{ABC} = KL^2/BC^2$.

Пусть, далее, p — полупериметр, S — площадь, r — радиус вписанной окружности и h — высота, опущенная из вершины P треугольника PKL (рис. 2). Тогда

$$\frac{S_{PKL}}{S_{ILK}} = \frac{h}{r} = \frac{2S}{KL} \cdot \frac{p}{S} = \frac{2p}{KL} = \frac{2BP}{KL},$$

поскольку $BP = CP$ и $BP + CP = AK + KP + PL + LA = 2p$ (мы пользуемся здесь равенством касательных к окружности, проведенных из точек P, K, L). Итак, $S_{PLK}/S_{ABC} = 2BP \cdot KL/BC^2$. Остается доказать, что последнее отношение меньше 1.

По неравенству треугольника $2KL < KL + KP + PL = 2p = 2BP$, т. е. $2BP \cdot KL < 2BP^2$. Но в случае, когда $\angle BPC > 90°$, имеем $2BP^2 < BC^2$, т. е. $2BP \cdot KL/BC^2 < 2BP^2/BC^2 < 1$, что и требовалось доказать.

Эту задачу можно решать и с помощью тригонометрии. Если α, β, γ — углы при вершинах A, B, C треугольника ABC, то $BC = KL \cos\beta \cos\gamma$; нужное неравенство приводится к виду $2\cos(\pi - \alpha)\cos\beta\cos\gamma > 1$ и вытекает из того, что $\pi - \alpha = \beta + \gamma < \pi/4$.

В. Ю. Протасов

Ф1153. *Жидкий раствор бетона налили в кузов самосвала доверху. Оценить, какая доля раствора останется в кузове после резкого торможения. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, мо-*

Как известно, свободная поверхность жидкостей, в том числе и раствора бетона, располагается в поле тяжести перпендикулярно линии отвеса. Если же отвес движется горизонтально с ускорением $\vec{a}$, линия отвеса отклоняется от вертикали на угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha = a/g$. Соответственно и поверхность жидкости, оставаясь перпендикулярной линии отвеса, будет наклонена к горизонту под тем же углом α.

жете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно разумные их числовые значения и получить числовой результат.

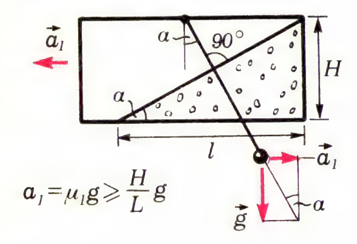


Рис. 1.

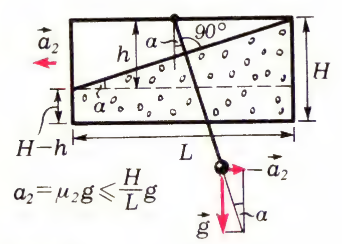


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

При резком торможении колеса автомобиля не катятся, а скользят (только так можно быстро затормозить). Тогда из второго закона Ньютона следует

$$ma=F_{\text{тр}}=\mu mg, \qquad \text{т. е. } a=\mu g,$$

где μ — коэффициент трения скольжения.

Возможны два случая, изображенные на рисунках 1 и 2 соответственно. Первый случай: ускорение $\vec{a}_1$ таково, что часть дна открывается. При оценке будем считать, что кузов прямоугольный. Тогда масса бетона в кузове до торможения

$$M=\varrho LHd,$$

где ϱ — плотность раствора, а d, H и L — ширина, высота и длина кузова. Как видно из рисунка 1, $H/l=$ $=\operatorname{tg}\alpha=a_1/g$, откуда $l=Hg/a_1\leqslant L$, т. е.

$$a_1=\mu_1 g\geqslant\frac{H}{L}g.$$

Масса оставшегося в кузове бетона

$$m_1=\varrho l\frac{H}{2}d=\varrho\frac{H^2 d}{2a_1}g.$$

Таким образом, доля оставшегося бетона

$$\eta_1=\frac{m_1}{M}=\frac{\varrho H^2 dg}{2a_1\varrho LHd}=\frac{H}{L}\frac{g}{2a_1}=\frac{H}{L}\frac{1}{2\mu_1} \qquad \text{при } \mu_1\geqslant\frac{H}{L}.$$

Второй случай (см. рис. 2): ускорение a_2 таково, что задний борт освобождается от раствора на глубину $h=L\operatorname{tg}\alpha=La_2/g$, а глубина слоя раствора там $H-h=$ $=H-La_2/g$. Масса оставшегося в кузове раствора

$$m_2=\varrho L\left(H-L\frac{a_2}{2g}\right)d,$$

и доля оставшегося раствора

$$\eta_2=\frac{m_2}{M}=\frac{\varrho L(H-La_2/(2g))d}{\varrho LHd}=$$
$$=1-\frac{L}{H}\frac{a_2}{2g}=1-\frac{L}{H}\frac{\mu_2}{2} \quad \text{при } \mu_2<\frac{H}{L}.$$

Сделаем численные оценки. Положим $H=1$ м, $L=5$ м, т. е. $H/L=0{,}2$. Тогда при $\mu_1\geqslant H/L=0{,}2$, например при $\mu_1=0{,}5$, имеем

$$\eta_1=\frac{H}{L}\frac{1}{2\mu_1}=\frac{1}{5}=20~\%.$$

При $\mu_2<H/L=0{,}2$, например при $\mu_2=0{,}1$, имеем

$$\eta_2=1-\frac{L}{H}\frac{\mu_2}{2}=\frac{3}{4}=75~\%.$$

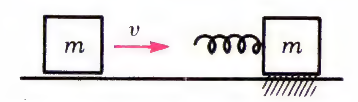
Если же торможение не резкое, т. е. колеса катятся, тогда торможение обусловлено трением качения. В этом случае $\mu\approx0{,}02$ и

$$\eta=1-\frac{L}{H}\frac{\mu}{2}\approx\frac{19}{20}\approx95~\%.$$

Итак, в любом случае доверху кузов наполнять нельзя: потери неизбежны.

Г. В. Меледин

Ф1154. *На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Один из кубиков приклеен к столу (см. рисунок). Кубик отрывается от стола, если к нему приложить горизонтальную силу F. Между кубиками имеется невесомая свободная пружина жесткостью k. Незакрепленному кубику сообщили скорость v. С какими скоростями разлетятся кубики после столкновения?*



Обозначим скорости кубиков после столкновения через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Сразу после отрыва второго кубика от стола система двух кубиков (между которыми находится невесомая пружина) становится замкнутой. Запишем для нее закон сохранения импульса. Обозначим через $\vec{u}$ скорость первого кубика непосредственно после отрыва от стола второго. Тогда получаем

$$mu=mv_2-mv_1. \qquad (2)$$

Скорость u найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mu^2}{2}+\frac{kx^2}{2}, \qquad (3)$$

где $x=F/k$ — величина сжатия пружины в момент отрыва.

Решая систему уравнений (1)—(3), находим

$$v_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{v^2+F^2/(km)}-\sqrt{v^2-F^2/(km)}\right),$$

$$v_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{v^2+F^2/(km)}+\sqrt{v^2-F^2/(km)}\right).$$

Интересно рассмотреть некоторые частные случаи.

Пусть, например, $mv^2/2<F^2/(2k)$. Тогда максимального сжатия пружины будет недостаточно для отрыва второго кубика от стола и первый кубик после столкновения будет двигаться влево с первоначальной величиной скорости v.

Если $mv^2/2=F^2/(2k)$, то после разлета кубики будут двигаться в противоположные стороны с одинаковыми по величине скоростями, равными $v/\sqrt{2}$.

Если же $mv^2/2\gg F^2/(2k)$ (случай очень жесткой пружины, когда $k\to\infty$), то $v_1\to 0$, а $v_2\to v$.

Г. В. Федотович

Ф1155. *Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S, верхний конец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу (см. рисунок). Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы один моль воздуха, занимающий объем V и имеющий атмосферное давление p_a. Поршень, который вначале прижат снизу к перегородке, от-*

Если действующая на поршень сила тяжести Mg превышает действующую на него снизу силу атмосферного давления $p_a S$, то поршень, очевидно, выпадет из трубы, какой бы длинной она не была.

Если же $Mg<p_a S$, то происходит следующее. Проникающий через отверстие воздух создает в отсеке между перегородкой цилиндра и поршнем давление. Когда оно достигнет величины p такой, что

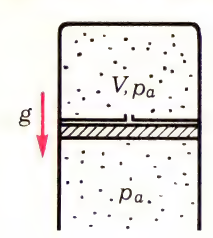
$$Mg+pS=p_a S,$$

поршень начинает двигаться вниз. По мере его движения в этот отсек попадают дополнительные порции воздуха, поддерживая там постоянное давление p. Поскольку отверстие маленькое, поршень движется медленно. Он остановится, когда давление над перегородкой упадет до величины p.

При смещении поршня на расстояние x газ, находящийся в цилиндре, совершает работу $A=pSx$,



пускают. Принимая, что внутренняя энергия газа равна cT, найти, на сколько опустится поршень.



а внутренняя энергия его уменьшается. Будем считать, что перегородка между образовавшимися в цилиндре отсеками не препятствует теплообмену между ними, так что температуры воздуха в них все время одинаковы. Обозначив температуру воздуха в начальный момент через T_0, а в момент остановки через T, получаем

$$cT_0=cT+A.$$

Запишем также уравнения состояния газа для этих моментов:

$$p_aV=RT_0,$$
$$p(V+Sx)=RT.$$

Полученных уравнений достаточно для определения величины x:

$$x=\frac{V}{S}\,\frac{c}{c+R}\,\frac{Mg}{p_aS-Mg}\quad \text{при}\quad Mg<p_aS.$$

Г. Л. Коткин





Ф1156. *Два одинаковых электромагнита L_1 и L_2 включены последовательно в цепь постоянного тока (рис. 1). С помощью ключа K_1 параллельно одному из них может в непроводящем направлении подключаться диод D. При замкнутом ключе K_2 к электромагнитам притянута железная пластинка. Если ключ K_1 разомкнут, то при размыкании K_2 пластинка отрывается от обоих магнитов одновременно и падает, сохраняя горизонтальное положение. Если ключ K_1 замкнут, то при размыкании K_2 пластинка вначале отрывается от магнита L_1, а потом от L_2, что приводит к ее вращению. Объяснить раз-*

В первом случае, когда ключ K_1 разомкнут, при размыкании ключа K_2 ток в обоих электромагнитах прекращается одновременно, и так же одновременно происходит «отпускание» обоих концов железной пластинки.

Рассмотрим теперь второй случай, когда ключ K_1 замкнут. При замкнутом ключе K_2 (рис. 2) через последовательно включенные обмотки электромагнитов протекают одинаковые токи I_0, так как через включенный в непроводящем направлении диод D ток не течет. Разомкнем ключ K_2 (рис. 3). Ток через электромагнит L_1 прекращается практически мгновенно, так как цепь для него разомкнута. Ток же через электромагнит L_2 в первый момент вообще не изменяется. Это происходит из-за того, что ЭДС самоиндукции, возникающая в обмотке L_2, оказывается приложенной к диоду D в проводящем направлении, и через него начинает протекать ток I_0. В дальнейшем ток через L_2 постепенно затухает, в соответствии с законами Фарадея и Ома:

$$-L_2\frac{\Delta I}{\Delta t}=IR,\quad I=I_0e^{-Rt/L_2},$$

где R включает в себя сопротивление диода D в про-

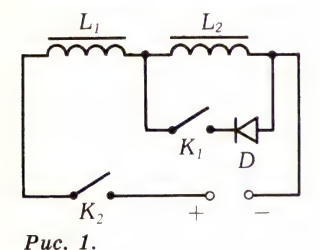


Рис. 1.

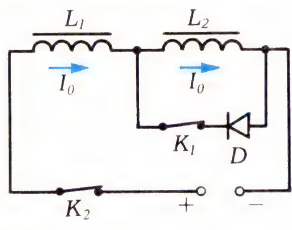


Рис. 2.

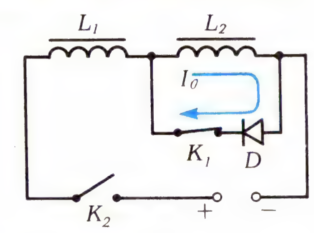


Рис. 3.

личие в поведении пластинки в первом и втором случаях.

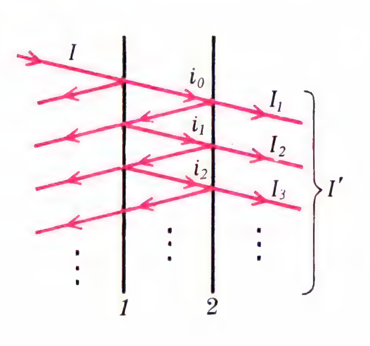


водящем направлении и обмотки L_2. Видно, что чем меньше R, тем дольше затухает ток в L_2.

Таким образом, при замкнутом ключе K_1 ток в L_2 затухает медленнее, чем в L_1, и электромагнит L_2 дольше удерживает свой конец пластины.

В. Б. Голубев

Ф1157. *Имеются два полупрозрачных зеркала, каждое из которых, как показывают измерения, пропускает приблизительно 1/5 часть светового потока, а остальной свет отражает. Если на пути параллельного пучка света установить оба зеркала так, чтобы их плоскости были перпендикулярны пучку, то, казалось бы, они должны пропускать 1/25 часть падающего потока света, тогда как на самом деле свет ослабляется не в 25 раз, а заметно меньше (примерно в 10 раз). Объяснить явление.*



Явление объясняется тем, что лучи света, отраженные вторым зеркалом, снова возвращаются на первое зеркало, частично отражаются от него и, попадая на второе, увеличивают интенсивность прошедшего пучка.

Пусть I — интенсивность исходного светового пучка (см. рисунок; падающий световой пучок для наглядности изображен наклонным). Тогда интенсивность света, прошедшего через первое зеркало, будет равна $i_0 = I/k$, где k — коэффициент ослабления света зеркалом ($k=5$ по условию задачи). При последовательных отражениях интенсивность «захваченного» между зеркалами света постепенно падает из-за частичной прозрачности зеркал, и через достаточно большое число отражений наружу выйдет практически весь «захваченный» свет, причем почти поровну вправо и влево. Таким образом, полная интенсивность прошедшего света будет равна

$$I' \approx \frac{i_0}{2} = \frac{I}{2k} = \frac{I}{10}.$$

Задача допускает и точное решение. Запишем, как меняется интенсивность «захваченного» между зеркалами света при последовательных отражениях:

$$i_1 = i_0\left(1-\frac{1}{k}\right)^2,\ i_2 = i_1\left(1-\frac{1}{k}\right)^2 = i_0\left(1-\frac{1}{k}\right)^4, \ldots$$

При каждом падении на зеркало *2* свет частично выходит вправо:

$$I_1 = \frac{i_0}{k},\quad I_2 = \frac{i_1}{k},\quad I_3 = \frac{i_2}{k}, \ldots$$

Полная интенсивность прошедшего света

$$I' = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots = \frac{1}{k}(i_0 + i_1 + i_2 + \ldots) =$$

$$= \frac{i_0}{k}\left(1 + \left(1-\frac{1}{k}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{k}\right)^4 + \ldots\right)$$

представляет собой сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = (1-1/k)^2$, поэтому

$$I' = \frac{i_0}{k}\,\frac{1}{1-q} = \frac{i_0}{k}\,\frac{k^2}{k^2-(k-1)^2} = \frac{i_0 k}{2k-1} = \frac{I}{2k-1} = \frac{I}{9}.$$

При $k=5$ точное решение всего на 10 % отличается от приближенного.

В. Б. Голубев

Линейные неравенства и задача М1085

В задаче М1085 «Задачника «Кванта» речь шла о сплетениях прямых на плоскости. Некоторые из сплетений являются проекцией системы непересекающихся прямых в пространстве (рис. 1, *а*), а некоторые отвечают «невозможным» объектам (рис. 1, *б*). Мы получили письмо от канадского математика Уолтера Уайтли, которому в ходе научной работы приходилось изучать подобные сплетения. Его подход основан на применении линейных неравенств.

Будем считать, что сплетение расположено в горизонтальной (x, y)-плоскости, причем ни одна из прямых не проходит через начало координат. Ось OZ направим вертикально вверх. Как задать положение i-й прямой в пространстве? Ее проекция на (x, y)-плоскость уже задана, поэтому прямая лежит в вертикальной плоскости, проходящей через эту проекцию. Чтобы определить положение прямой в пространстве, достаточно задать еще одну плоскость, в которой она лежит — например, плоскость, проходящую через начало координат. Эта плоскость задается уравнением $z=px+qy$. Итак, прямые в пространстве заданы, если для каждой прямой сплетения выбраны свои коэффициенты p_i и q_i.

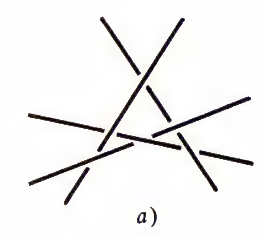
Пусть (x_{ij}, y_{ij}) — координаты точки пересечения i-й и j-й прямой сплетения. Тогда высота точки i-й прямой в пространстве, лежащей над точкой (x_{ij}, y_{ij}), равна $z=p_i x_{ij}+q_i y_{ij}$, а для соответствующей точки j-й прямой — $z=p_j x_{ij}+q_j y_{ij}$. Если пересечение такое, как на рисунке 2, *а*, то

$$p_i x_{ij}+q_i x_{ij} > p_j x_{ij}+q_j x_{ij}, \quad (1)$$

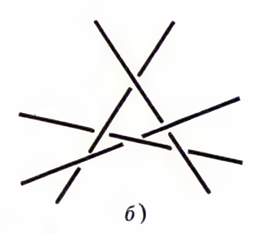
а если такое, как на рисунке 2, *б*, то неравенство противоположное:

$$p_i x_{ij}+q_i x_{ij} < p_i x_{ij}+q_j x_{ij}. \quad (2)$$

Совокупность неравенств (1) и (2) для всех пар индексов (i, j) образует систему линейных неравенств с неизвестными $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Если эта система имеет решение, то сплетение является проекцией пространственных прямых, а если система несовместна, то сплетение описывает «невозможный» объект.



а)



б)

Рис. 1.

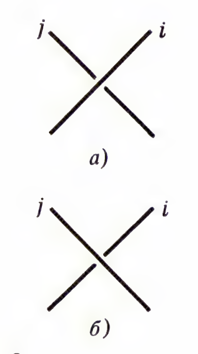


Рис. 2.

У. Уайтли предлагает и другой — физический — подход к этой задаче. Представим себе, что прямые сплетения сделаны из жесткой проволоки, которую можно слегка изгибать. Тогда по любой картинке можно изготовить проволочное сплетение, «почти» лежащее в горизонтальной плоскости.

Обозначим через f_{ij} величину силы упругости, действующей на j-ю проволочную прямую со стороны i-й. Эти силы приложены в точках касания прямых и направлены вдоль вертикальной оси Oz. Для такого пересечения, как на рисунке 2, *а*,

$$f_{ij}<0 \quad (3)$$

(сила направлена вниз), а для такого, как на рисунке 2, *б*,

$$f_{ij}>0. \quad (4)$$

Кроме того, сила действия равна силе противодействия:

$$f_{ij}=-f_{ji}. \quad (5)$$

Каждая прямая проволочного сплетения будет находиться в равновесии. Это означает, что суммарная сила, действующая на i-ю прямую, равна нулю:

$$f_{1i}+f_{2i}+\ldots+f_{ni}=0 \ (i=1, 2, \ldots, n). \quad (6)$$

Равен нулю и суммарный момент сил, действующих на i-ю прямую, относительно осей OX и OY:

$$f_{1i}x_{1i}+f_{2i}x_{2i}+\ldots+f_{ni}x_{ni}=0 \ (i=1, 2, \ldots, n), \quad (7)$$

$$f_{1i}y_{1i}+f_{2i}y_{2i}+\ldots+f_{ni}y_{ni}=0 \ (i=1, 2, \ldots, n). \quad (8)$$

(Окончание см. на с. 60)

Задачи

1. В равенстве 101—102=1 передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

2. Судно «Альфа» пришвартовалось к причалу раньше, чем судно «Квант». Сможет ли оно и отплыть раньше, если при этом не снимать с тумбы швартовочный канат «Кванта» (см. рисунок)?

3. Дедушка Сулейман на 100 лет старше своей праправнучки Зульфии. В этом году Зульфия обнаружила, что произведение ее возраста и возраста дедушки Сулеймана равняется 1989. Сколько ей лет?

4. Четыре неформальных молодежных объединения «Зеленый фронт», «Эко», «Красный патруль» и «Искатели истины» решили объединиться. На объединительной конференции присутствовало поровну делегатов от всех четырех объединений.

Разногласия возникли при выборе названия нового объединения. Для голосования были отобраны два названия: «Зеленый мыслитель» и «Мыслящий эколог».

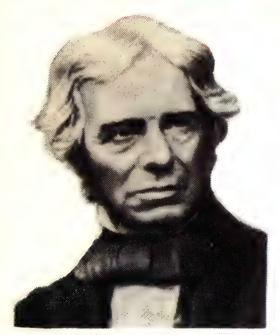
Известно, что все делегаты от «Красного патруля» хотят голосовать за одно и то же название, а в остальных делегациях единства нет. Среди делегатов «Зеленого фронта» столько же хотят голосовать за первое название, сколько делегатов от «Эко» — за второе. Среди приверженцев второго названия одну треть составляют делегаты «Искателей истины».

Какое название будет выбрано?

5. Квадратный лист бумаги разрезали на 6 кусков в форме выпуклых многоугольников. Пять кусков затерялись, остался один кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по одному этому восьмиугольнику восстановить исходный квадрат?



Эти задачи нам предложили: А. В. Корлюков, Н. П. Долбилин, А. П. Савин, В. В. Произволов.



...надежда получить электричество при помощи обыкновенного магнетизма в разные времена побуждала меня экспериментально изучить индуктивное действие электрических токов.

М. Фарадей

А так ли хорошо знакома вам

электромагнитная индукция ?

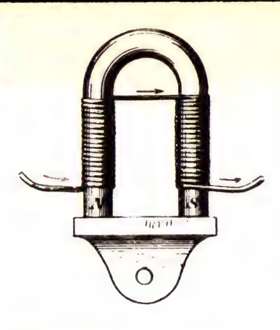


Всю свою жизнь Фарадей посвятил доказательству того, что ни один происходящий в природе электрический или магнитный процесс не протекает изолированно. Глубокая вера Фарадея во взаимосвязь всех сил природы привела его после многолетних неудач к уникальному открытию.

Новый эффект, как это часто случается, обнаруживался затем во множестве внешне различных явлений, объединенных, однако одним качественным выводом: переменные магнитные поля возбуждают поля электрические. Именно на этом принципе основано действие всех существующих электрических машин. Именно открытие Фарадея предоставило возможность преобразования механической энергии в электрическую, передачи энергии на расстояние и тем самым легло в фундамент современной технической цивилизации.

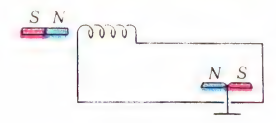
Работы Фарадея и его выдающихся современников позволили шаг за шагом создать единую картину электромагнетизма.

При изучении этого раздела физики вы не только объясните известные вам факты и наблюдения, но и сможете разобраться с электромагнитными явлениями как космических, так и микроскопических масштабов.



Вопросы и задачи

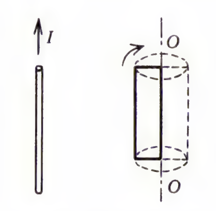
1. Как двигать магнит, чтобы повернуть



стрелку северным полюсом к наблюдателю?

2. Горизонтальная круглая рамка находится в магнитном поле, направленном вертикально вверх. Каким будет направление индукционного тока при наблюдении рамки сверху, если поле уменьшается со временем?

3. При каких положениях рамки, вращающейся с постоянной скоростью у прямоли-



нейного проводника с током, возникающая в ней ЭДС будет наибольшей? наименьшей?

4. В короткозамкнутую катушку сначала быстро, а затем медленно вдвигают магнит. Одинаковый ли заряд переносится при этом индукционным током? Одинаковое ли количество теплоты выделяется в катушке?

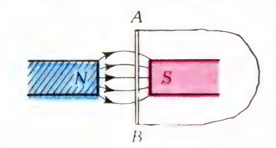
5. Как будет падать магнит в длинной медной трубке? Сопротивлением воздуха пренебречь.

6. Концы сложенной вдвое проволоки присоединены к гальванометру. Почему стрелка прибора остается на нуле, когда проволока пересекает линии индукции магнитного поля?

7. На вертикально расположенной катушке лежит металлическая монета. Почему она нагревается, когда по катушке течет переменный ток, и остается холодной — при постоянном?

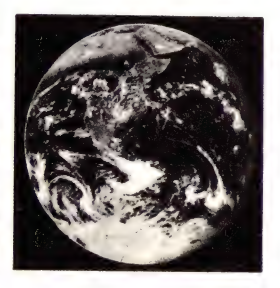
8. По прямолинейному проводнику течет ток высокой частоты. Как изменится сопротивление этого проводника, если ему придать форму соленоида?

9. Проводник AB движется так, что по нему идет ток от точки A



к точке B. В какой из этих точек потенциал выше?

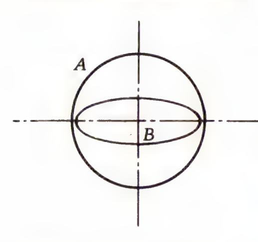
10. Два одинаковых самолета летят горизонтально с одинаковыми скоростями, один — вблизи экватора, другой — у полюса. У какого из них



возникает бóльшая разность потенциалов на концах крыльев?

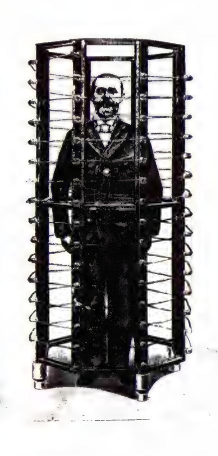
11. Ротор работающего электрогенератора испытывает торможение. Какова природа сил, вызывающих это торможение?

12. Два круговых проводника расположены перпендикулярно друг к другу. Возникнет ли



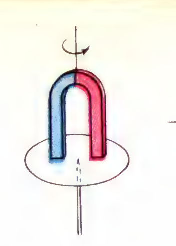
индукционный ток в проводнике A при изменениях тока в контуре B?

13. Кольцо из сверхпроводника находится вблизи постоянного магнита и пронизывается магнитным потоком Ф. Тока в кольце нет. Каким будет магнитный поток через это кольцо, если убрать магнит?



Микроопыт

Подвесьте подковообразный магнит на нитке над диском из алюминиевой фольги, способным вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. Если раскрутить маг-

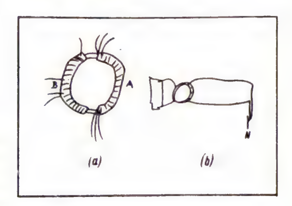


нит, то диск начнет вращаться. В какую сторону. Почему?

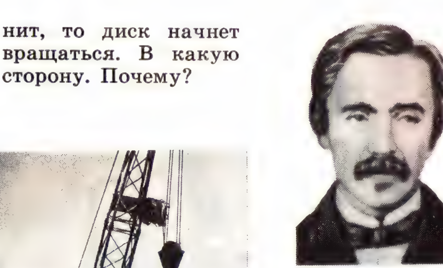


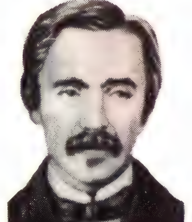
Любопытно, что...

...в новейших типах электрических машин отсутствуют какие-либо механические подвижные части. В так называемом МГД (магнитогидродинамическом) - генераторе вместо проволочного проводника между полюсами магнита движется плазма, образовавшаяся при сгорании нефти или газа. Носители заряда в плазме отклоняются магнитным полем к электродам, и во внешней цепи возникает ток.

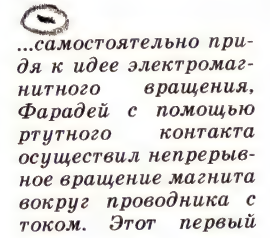


...Фарадей годами носил в жилетном кармане маленький полосной магнит и проволочную катушку как постоянное напоминание о нерешенной проблеме порождения магнитным полем электрического тока.



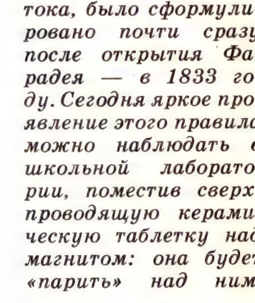


...вихревые индукционные токи (токи Фуко) могут, как и трение, быть не только вредными, но и полезными. Всего лишь три примера: индукционные печи для нагрева и даже плавления металлов, «магнитное успокоение» в измерительных приборах и циркулярных пилах и... всем известный счетчик электрической энергии.



...самостоятельно придя к идее электромагнитного вращения, Фарадей с помощью ртутного контакта осуществил непрерывное вращение магнита вокруг проводника с током. Этот первый электродвигатель заработал в декабре 1821 года.





...правило Ленца, определяющее направление идукционного тока, было сформулировано почти сразу после открытия Фарадея — в 1833 году. Сегодня яркое проявление этого правила можно наблюдать в школьной лаборатории, поместив сверхпроводящую керамическую таблетку над магнитом: она будет «парить» над ним.

Что читать в «Кванте» об электромагнитной индукции (публикации последних лет)

1. «Электромагнитная индукция и принцип относительности» — 1987, № 11;
2. «Пути электромагнитной теории» — 1988, № 2;
3. «Правило Ленца» — 1988, № 5;
4. «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи» — 1988, № 6;
5. «Сила Лоренца и эффект Холла» — 1989, № 3.




Собака
Поп
Убил
Надпись
Яма
Мясо

У ПОПА БЫЛА СОБАКА...

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

В детстве почти всем приходилось слышать историю о том, как



У попа была собака,
Он ее любил,
Она съела кусок мяса,
Он ее убил,
В землю закопал,
Надпись написал:
«У попа была собака...»

Это немудреное стихотворение привлекательно тем, что с каждой строфой оно снова и снова возвращается к самому себе, подобно змее, заглатывающей собственный хвост. Я приведу несколько примеров таких предложений — математических и нематематических,— которые говорят что-то сами о себе.



В этой фразе двадцать восемь букв.



Эта фраза — типичный пример предложения, говорящего о себе самом. Пересчитайте буквы, и вы убедитесь, что это — чистая правда. Вот пример посложнее:



Это предложение содержит двенадцать слов, двадцать шесть слогов и семьдесят три буквы.

Не верите? Проверьте, что это тоже «честное» предложение.

Следующий пример я прочитал в одном из номеров американского журнала «Scientific American» за 1982 год (некоторые другие примеры — тоже оттуда)*). Журнал тогда издавался только по-английски, и мне пришлось основательно потрудиться, прежде чем родился следующий «монстр».



В этой фразе два раза встречается слово «в», два раза встречается слово «этой», два раза встречается слово «фразе», четырнадцать раз встречается слово «встречается», четыренадцать раз встречается слово «слово», шесть раз встречается слово «раз», девять раз встречается слово «раза», семь раз встречается слово «два», три раза встречается слово «четырнадцать», три раза встречается слово «три», два раза встречается слово «девять», два раза встречается слово «семь», два раза встречается слово «шесть».

Уф! Прочитать это предложение совсем нелегко. И все же оно утверждает чистую правду. А вот задача для вас:



Придумайте такое десятизначное число, первая цифра которого показывает, сколько в этом числе единиц, вторая — сколько в нем двоек, третья — сколько троек, ..., десятая — сколько нулей.

Еще один вопрос.

В конце предисловия к переводу одной математической книги автор добавил такие замечания:

---

*) В то время математический раздел журнала редактировал профессор Даглас Хофстадтер, автор имевшей шумный успех книги «Гёдель, Эшер, Бах». К творчеству Д. Хофстадтера «Квант» надеется обратиться в ближайшем будущем.



Благодарю профессора NN за перевод этой книги.
Я также благодарю профессора NN за перевод последнего предложения.
Я также благодарю профессора NN за перевод последнего предложения.

Почему этот ряд благодарностей не нужно продолжать?

Может быть, вам доставит удовольствие еще одна выдержка из упоминавшегося выпуска «Scientific American»:

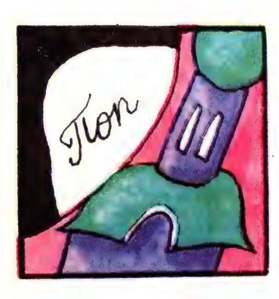
Вспоминаю случай на экзамене по истории. Доставшийся мне билет включал в себя следующее: «IV. Напишите вопрос, подходящий для выпускного экзамена по этому курсу, а затем ответьте на него». В качестве ответа я просто дважды переписал этот вопрос.

Что вы думаете об этой истории? Во всяком случае, она показывает, что предложения, говорящие сами о себе, не всегда говорят только о количестве своих букв или слогов. Вот еще пример в этом роде:



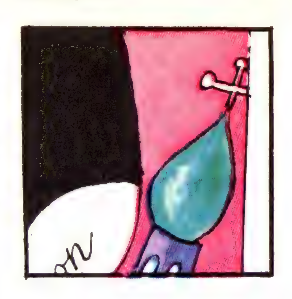
Девять слов назад это предложение еще не началось.

Это как будто правда. Следующее предложение — тоже истинное, хотя из него вы вряд ли узнаете много нового:



Вы только что начали читать предложение, чтение которого вы уже заканчиваете.

Лозунг



Короче!

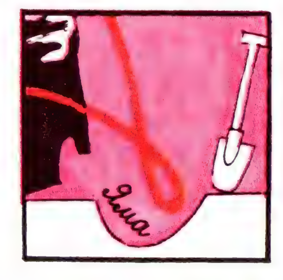
сам следует тому, к чему призывает. Зато приказ



Не сметь командовать!

находится в противоречии с самим собой. Приходилось ли вам видеть майки с надписью «На этой майке ничего не написано»? Нашумевшая в свое время (и до сих пор вызывающая споры) картина К. Малевича «Черный квадрат», по-моему, как бы утверждает, что на ней ничего не изображено.

Один математик (Г. Фрейденталь) рассказал своему сыну старую немецкую сказку:



Однажды крестьянин шел по дороге со своим сыном. Сын рассказывал что-то отцу и сказал ему неправду. Крестьянин догадался, что сын обманывает его. Тогда он сказал: «Сейчас, сынок, мы подходим к мосту. Этот мост не простой, а волшебный — он проваливается под теми, кто говорит неправду». Когда сын крестьянина услышал это, он испугался и признался отцу, что обманул его.

Выслушав эту историю, сын математика спросил, что было дальше. «А дальше,— ответил математик,— крестьянин со своим сыном вступили на мост, и мост провалился под

крестьянином — ведь никаких волшебных мостов на самом деле нет.»

Как вам понравилась эта история? По-моему, что-то здесь не так...

Еще в Древней Греции знали «парадокс лжеца». Представьте себе, что вы открываете книгу и читаете:



То, что написано на этой странице,— неправда.

Так что же тут написано? Если правда, то тогда — это неправда; а если неправда — то это правда... Это — одна из форм «парадокса лжеца».

А слышали ли вы о парадоксе Рассела? В одном полку брадобрею приказали брить всех тех, кто не бреется сам. Брадобрею не ясно, брить ли ему самого себя. Как бы поступили на его месте?

Каждое натуральное число можно назвать, произнеся несколько слов. Например, число 2 задается одним словом, а число 22 — двумя. Давайте рассмотрим



Наименьшее число, которое нельзя задать меньше чем десятью словами.

Как вы думаете, чему равно это число? Его описание состоит всего из 9 слов, что противоречит его основному свойству. Этот парадокс называется парадоксом Ришара.

Парадоксы Рассела и Ришара не так безобидны, как может показаться. Придуманные в начале века, они показали, что к математическим определениям нужно относиться осторожно, и заставили математиков пересмотреть формальные основы своей науки.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Сумма пяти неотрицательных чисел равна единице. Какое наибольшее значение может иметь сумма абсолютных величин попарных разностей этих чисел?

2. Известно, что $abc=1$, $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно 1.

3. Решите в простых числах уравнение $x^y+1=z$.

4. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны AB и DE, BC и EF, CD и FA параллельны. Известно также, что диагонали AD, BE, CF равны. Докажите, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

5. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с углом A, равным 30°, B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что отрезки B_1C_2 и B_2C_1 перпендикулярны.

Девятый класс

6. Решите в целых числах систему уравнений $ab+cd=-1$; $ac+bd=-1$, $ad+bc=-1$.

7. Решите в целых числах систему уравнений

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z=2.$$

8. Медианы треугольника равны 3, 4, 5. Какой это тупоугольник — остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

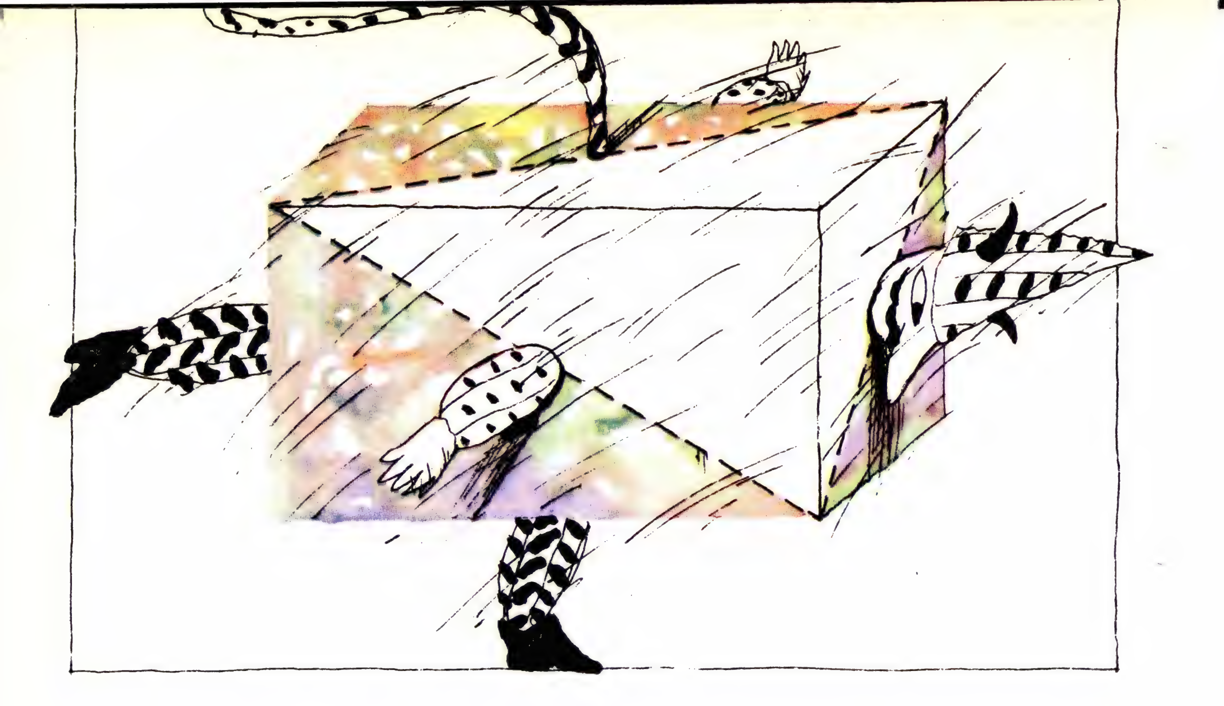
9. Результатом последовательных отражений некоторой точки M относительно всех сторон и вершины A некоторого треугольника ABC, произведенных в некотором порядке, является снова точка M. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

10. Ломаная, лежащая на поверхности тетраэдра, содержит все его вершины и середины ребер. Каково минимальное возможное число звеньев этой ломаной?

Десятый класс

11. Рассмотрим всевозможные параболы $y=x^2+ax+b$, пересекающие оси координат в трех различных точках. Для каждой такой параболы через эти три точки проведем

(Окончание см. на с. 51)



Школа в „Кванте"

Средние линии

В. Н. ВАГУТЕН

В этой статье обсуждается цепочка теорем, пронизывающая весь школьный курс геометрии — от 6-го до 10-го класса. Она начинается с теоремы о средних линиях треугольника и приводит к интересным свойствам тетраэдра и других многогранников.

Треугольник, четырехугольник, параллелограмм

К любому треугольнику KLM можно пристроить три равных ему треугольника AKM, BLK, CLM, каждый из которых образует вместе с треугольником KLM параллелограмм (рис. 1). При этом $AK=ML=KB$, и к вершине K примыкают три угла, равные трем разным углам треугольника, в сумме составляющие 180°, поэтому K — середина отрезка AB; аналогично, L — середина отрезка BC, а M — середина отрезка CA.

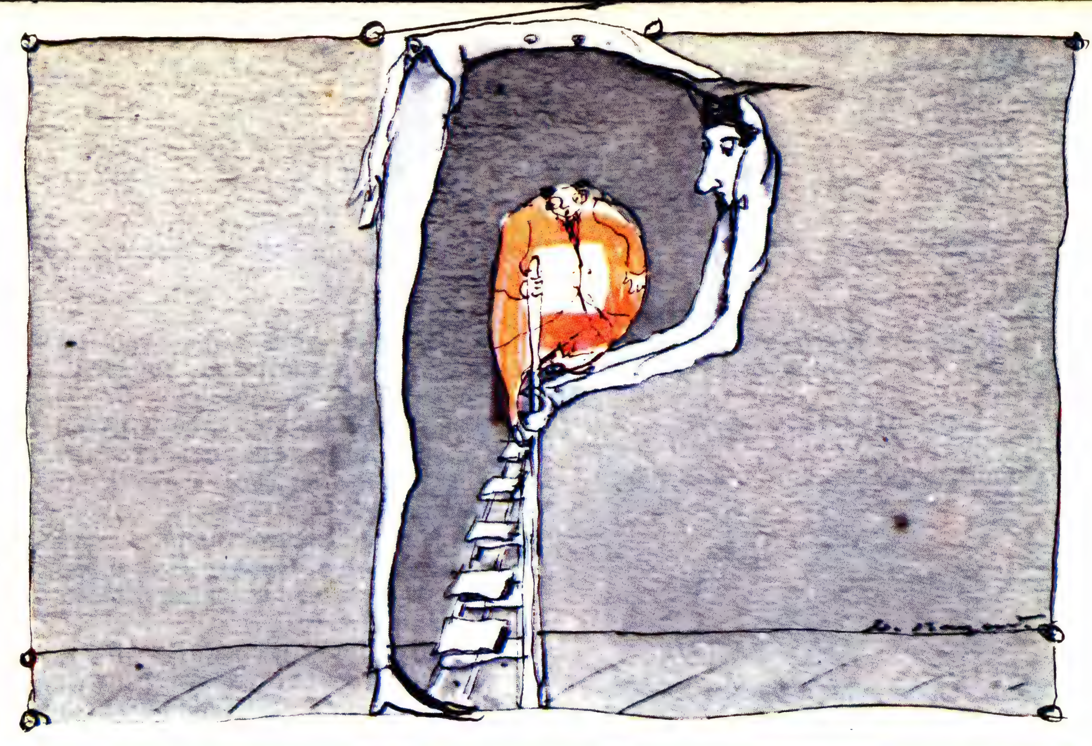
Ту же самую картину мы можем получить, начав с большого треугольника ABC.

Теорема 1. *Если соединить в любом треугольнике середины сторон, мы получим четыре равных треугольника, причем средний составляет с каждым из трех других параллелограмм.*

В этой формулировке участвуют сразу все три средние линии треугольника. Обычно в учебнике приводится теорема, где речь идет об одной средней линии.

Теорема 2. *Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне треугольника и равен ее половине* (см. рис. 1).

Именно эта теорема и обратная к ней — о том, что прямая, парал-



Практикум абитуриента

Мощность в цепи постоянного тока

А. В. КОРЖУЕВ

Вспомним основные закономерности, которые используются при решении задач на расчет цепей постоянного тока.

Пусть имеется простая (неразветвленная) замкнутая цепь (рис. 1), содержащая источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r и резистор сопротивлением R (его называют также внешним сопротивлением). Согласно закону Ома для такой цепи, в ней течет ток

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}.$$

При этом напряжение на внешнем участке цепи равно

$$U=\mathscr{E}-Ir,$$

мощность, выделяемая на резисторе, равна

$$P_{\text{вн}}=IU,$$

а полная мощность источника —

$$P_{\text{п}}=I\mathscr{E}.$$

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач, в которых обсуждается, прежде всего, вопрос о мощности постоянного тока.

Задача 1. *Электрическая цепь содержит источник, ЭДС которого $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r, и реостат сопротивлением R (см. рис. 1). Вычислите полную мощность, выделяемую источником, мощность, отдаваемую во внешнюю цепь (полезную мощность), и КПД источника. Проанализируйте зависимость этих величин от внешнего сопротивления.*

Согласно закону Ома, по цепи течет ток

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}.$$

Мощность, выделяемая на участке це-

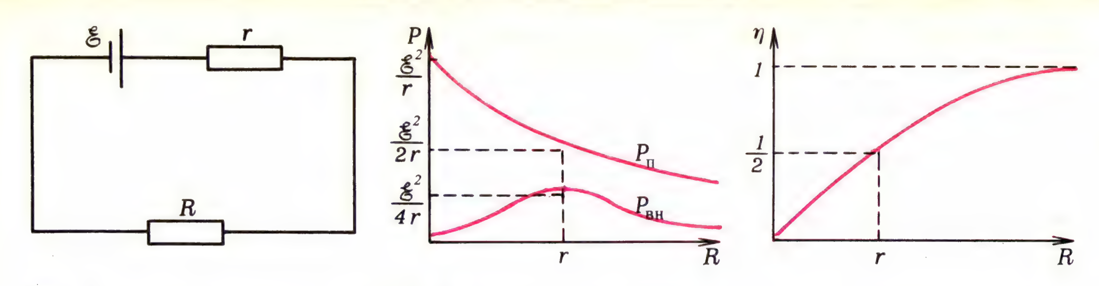


Рис. 1. *Рис. 2.*

пи с напряжением U, по определению равна $P = IU$. В нашем случае

$$P_{вн} = IU = I^2R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Полная мощность источника равна

$$P_п = I\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}^2}{R+r},$$

а его КПД —

$$\eta = \frac{P_{вн}}{P_п} = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+r/R}.$$

Проанализируем теперь зависимость всех найденных величин от внешнего сопротивления R. Видно, что с увеличением R полная мощность будет уменьшаться, а КПД наоборот возрастать — при возрастании R все бо́льшая доля полной мощности выделяется на внешнем участке цепи (по сравнению с мощностью, выделяющейся внутри источника). Сложнее обстоит дело с мощностью, выделяющейся в реостате. Из выражения $P_{вн} = \mathscr{E}^2R/(R+r)^2$ следует, что $P_{вн} = 0$ при $R = 0$ (что вполне естественно) и при $R \to \infty$. Очевидно, существует такое значение R, при котором полезная мощность максимальна. Его легко найти, продифференцировав $P_{вн}$ по сопротивлению R и приравняв эту производную нулю:

$$P'_{вн} = \frac{\mathscr{E}^2(R+r)^2 - 2\mathscr{E}^2R(R+r)}{(R+r)^4} = 0,$$

откуда получаем

$$R = r$$

— $P_{вн}$ максимально и равно $\mathscr{E}^2/(4r)$ при условии равенства внешнего и внутреннего сопротивлений. Однако КПД при этом равен

$$\eta = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2},$$

т. е. половина всей вырабатываемой мощности выделяется на внутреннем сопротивлении источника. В свою очередь, КПД максимален и равен 1 при $R \to \infty$, но $P_{вн}$ при этом стремится к нулю. Таким образом, достичь одновременно максимальной и наиболее эффективной энергоотдачи в такой цепи не удается. Проигрывая в выделяемой мощности, мы выигрываем в КПД, и наоборот.

Графики зависимости $P_{вн}$, $P_п$ и η от внешнего сопротивления R изображены на рисунке 2. Графики наглядно подтверждают, что при $R = 0$ вся мощность выделяется на внутреннем сопротивлении источника. При $R = r$ мощность, отдаваемая во внешнюю цепь, равна половине всей вырабатываемой мощности, КПД при этом равен $1/2$. По мере увеличения R графики зависимости $P_п(R)$ и $P_{вн}(R)$ все плотнее приближаются друг к другу, мощность, выделяемая на внутреннем сопротивлении, уменьшается. При $R \gg r$ почти вся вырабатываемая мощность выделяется во внешней цепи и КПД стремится к 1.

Задача 2. *По цепи, изображенной на рисунке 1, течет ток I. Считая известными $\mathscr{E}$ и r источника, вычислите мощность, выделяемую во внешней цепи, полную мощность и КПД*

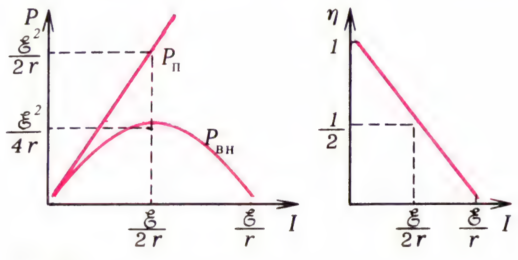


Рис. 3.

источника. Проанализируйте зависимость этих величин от тока в цепи.

Очевидно, что

$$P_{п} = I\mathcal{E},$$

а $P_{вн}$ найдем, вычитая из полной мощности мощность, выделенную на внутреннем сопротивлении источника:

$$P_{вн} = \mathcal{E}I - I^2 r.$$

Тогда КПД

$$\eta = \frac{P_{вн}}{P_{п}} = \frac{\mathcal{E}I - I^2 r}{\mathcal{E}I} = 1 - \frac{Ir}{\mathcal{E}}.$$

С ростом тока I полная мощность линейно растет (т.к. $\mathcal{E} = \text{const}$), а КПД падает — увеличение тока может быть достигнуто уменьшением внешнего сопротивления, а значит, уменьшением доли $P_{вн}$ по сравнению с мощностью, выделяющейся на внутреннем сопротивлении. Зависимость $P_{вн}$ от I — квадратичная. $P_{вн}$ обращается в ноль при $I = 0$ и при $I = \mathcal{E}/r$. Значит, существует некоторое значение тока, при котором полезная мощность максимальна. Произведя дифференцирование по току, найдем

$$P'_{вн} = \mathcal{E} - 2Ir = 0, \text{ если } I = \frac{\mathcal{E}}{2r}.$$

При этом $P_{вн\,max} = \mathcal{E}^2/(4r)$, что согласуется и с задачей 1.

Для наглядного истолкования полученных результатов построим графики зависимости всех найденных величин от тока (рис. 3). Как и в предыдущей задаче, максимальная внешняя мощность соответствует значению КПД, равному 1/2; при токе $I = \mathcal{E}/r$ $P_{вн} = 0$ (это тот случай, когда внешнее сопротивление равно 0) и $\eta = 0$.

Задача 3. *Известно, что со временем батарея, составленная из гальванических элементов, «садится» (ее ЭДС падает). Как зависит мощность во внешней цепи, полная мощность и КПД от ЭДС источника $\mathcal{E}$ (см. рис. 1)? Считать, что внутреннее сопротивление r источника не изменяется.*

Как уже было получено в задаче 1,

$$P_{п} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}, \quad P_{вн} = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2},$$

$$\eta = \frac{R}{R+r}.$$

Из этих выражений видно, что при падении $\mathcal{E}$ и полная мощность, и мощность, выделяемая во внешнюю цепь, уменьшаются, причем и та, и другая — по квадратичному закону, а КПД остается неизменным до тех пор, пока ЭДС источика не станет равной нулю и процесс выделения мощности не прекратится совсем.

Соответствующие графики изображены на рисунке 4.

Задача 4. *Электромотор, сопротивление обмотки якоря которого равно R, питается от источника постоянного напряжения U, при этом через него протекает ток I (рис. 5). Вычислите потребляемую мотором мощность, мощность, теряемую на нагрев обмотки, и КПД мотора. Проанализируйте зависимость указанных величин от тока в моторе.*

От источника мотор отбирает мощность

$$P_{от} = IU.$$

При этом на нагрев обмотки, в соответствии с законом Джоуля — Ленца, затрачивается тепловая мощность

$$P_{т} = I^2 R.$$

Разность между этими величинами

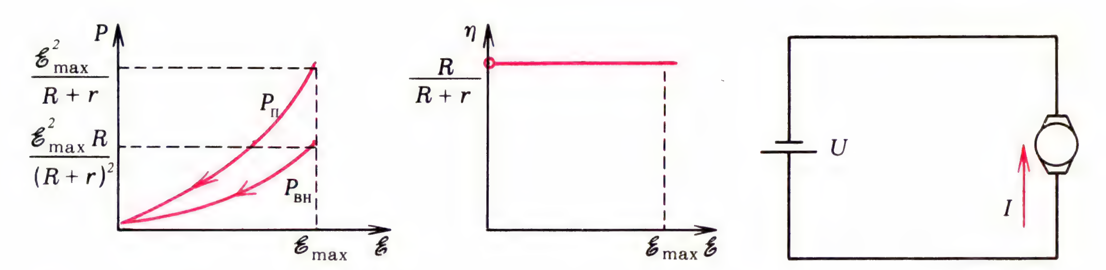


Рис. 4.

Рис. 5.

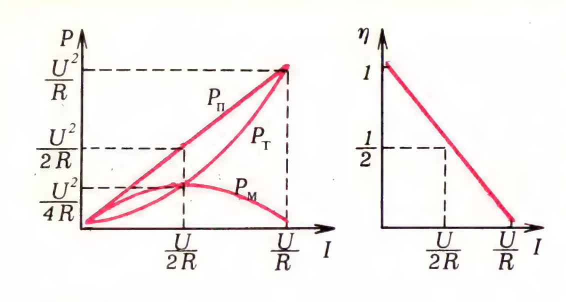


Рис. 6.

и есть механическая мощность:

$$P_м = P_{от} - P_т = IU - I^2R.$$

КПД мотора по определению равен отношению механической мощности к мощности, потребляемой от источника:

$$\eta = \frac{P_м}{P_{от}} = \frac{IU - I^2R}{IU} = 1 - \frac{IR}{U}.$$

Как видно, тепловая мощность с увеличением тока растет по квадратичному закону, мощность, получаемая мотором от источника,— по линейному, а КПД с увеличением тока падает — увеличивается мощность тепловых потерь в обмотке. Проводя для механической мощности рассуждения, аналогичные проведенным в задаче 2 для $P_{вн}$, заключаем, что существует некоторое значение тока, при котором $P_м$ максимальна. Дифференцируя выражение для $P_м$ по току и приравнивая производную нулю, получаем, что эта сила тока равна $U/(2R)$.

Из приведенных на рисунке 6 графиков видно, что по мере увеличения тока механическая мощность вначале оказывается больше тепловой, а затем меньше ее. При токе $I = U/(2R)$ обе мощности одинаковы и КПД равен 1/2 — половина всей вырабатываемой мощности превращается в механическую. При возрастании тока от $U/(2R)$ до U/R тепловая мощность растет, а механическая падает, причем рост тепловых потерь происходит быстрее, чем рост полной мощности. Это значит, что все бо́льшая часть вырабатываемой мощности выделяется на сопротивлении обмотки двигателя и КПД падает. Наконец, при токе $I = U/R$ вся вырабатываемая источником мощность расходуется в виде тепла и КПД становится равным нулю.

Упражнения

1. Для цепи, изображенной на рисунке 1, вычислите напряжение на внешнем участке и мощность, выделяющуюся на внутреннем сопротивлении источника, считая известными $\mathscr{E}$, r и R. Проанализируйте зависимость этих величин от внешнего сопротивления R. Постройте соответствующие графики.

2. В цепи (см. рис. 1) течет ток I. Вычислите мощность, выделяющуюся на внутреннем сопротивлении источника. Проанализируйте и изобразите графически ее зависимость от тока I. Считать $\mathscr{E}$, r и R известными.

3. Для цепи, содержащей источник с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r и резистор сопротивлением R, вычислите мощность, выделяющуюся на внутреннем сопротивлении, и проанализируйте ее зависимость от ЭДС (считая, что она постепенно падает). Постройте график.

4. Аккумулятор с внутренним сопротивлением r необходимо подзарядить с помощью источника постоянного напряжения U. Найдите мощность, расходуемую на подзарядку, мощность тепловых потерь на внутреннем сопротивлении аккумулятора, мощность, потребляемую от источника, и КПД заряжающего источника. Проанализируйте зависимость этих величин от ЭДС аккумулятора и постройте соответствующие графики.

Нам пишут

В недавно вышедшей книге «Задачи всесоюзных математических олимпиад» (М., Наука, 1989) содержится такая задача (к сожалению, опубликованная с опечаткой):

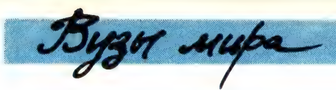
Докажите тождество

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Наш читатель *А. М. Колесников* из Ростовской области предлагает обобщение этой задачи, верное для любого $s \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (k!)^s((k+1)^s - 1) = ((n+1)!)^s - 1.$$

Предлагаем вам доказать эту красивую формулу.



Задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет

В этом номере мы публикуем задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет — старейший английский университет, основанный в 1168 году. В течение многих веков его выпускники составляли славу страны. И ныне, наряду с Кембриджем, Оксфордский университет является наиболее авторитетным высшим учебным заведением Великобритании.

Задачи, которые мы предлагаем вниманию читателей, предназначались для абитуриентов 1988 года, избравших своей будущей специальностью математику и механику. Оксфордский экзамен по математике проводится по традиции в два дня (в прошлом году — 21 и 22 ноября), причем оценивается лишь лучшая из двух попыток.

В первый день предлагалось 12 задач, разбитых на группы *А*, *Б* и *В*. Никаких ограничений на число решенных задач не накладывалось, однако при выводе общей оценки учитывалась задача 1 и три лучшие решения задач 2—12, причем наивысшая оценка за задачу 1 вдвое превышала оценку за любую другую задачу. Во второй день предлагалось 16 задач, разделенных на группы *А, Б, В, Г*. Все задачи оценивались одинаковым количеством баллов, но в зачет шло только пять лучших решений. Баллы, полученные абитуриентом в лучшей из двух попыток, возводились в квадрат и складывались. Поскольку сумма квадратов максимальных чисел баллов примерно равна числу поступающих, это позволяет легко упорядочить абитуриентов по результатам.

В прошлом году конкурс на математическое отделение Оксфордского университета составлял примерно 2 человека на место.

Математика I

Группа А

1. а) Разложите на простейшие дроби функцию

$$\frac{5x+1}{(x^2+2)(2x-1)}.$$

б) Найдите $f'(x)$, где

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}}{e^{-x}+1}.$$

в) Найдите площадь, ограниченную кривыми

$$y=x^3 \text{ и } y^3=16x.$$

г) Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} 2x=2\sin x$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

д) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-2x^2+x+2$ на отрезке $[0;\ 2]$.

е) Вычислите $\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

ж) Упростите выражение

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

з) Пусть A (2; 1; —1), B (3; 2; —1), C (3; 1; 0) — точки в пространстве. Найдите величину угла BAC.

и) Пусть $\max\{a,b\}$ — наибольшее из чисел a и b. Постройте график функции $y=m(x)=\max\{1;\ x\}$ при $x\in[0;\ 3]$ и вычислите

$$\int_0^3 m(x)dx.$$

к) Постройте график $y^2=x^3-x$.

Группа Б

2. а) Пусть a_1, b_1, a_2, b_2 — действительные числа. Докажите, что если для каждой пары действительных чисел c_1 и c_2 система

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение, то $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Докажите также, что при $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ и любых c_1 и c_2 система (1) имеет единственное решение.

б) Докажите, что если для каждой пары действительных чисел c_1 и c_2 уравнения

$$2z^3-z+c_1=0,$$
$$a_2z^3+b_2z+c_2=0$$

имеют общий корень, то $2b_2+a_2\neq 0$.

Кроме того, если общий корень у этих уравнений имеется, то

$$(-c_2-c_1b_2)(2b_2+a_2)^2=(a_2c_1-2c_2)^3.$$

3. Пусть S — окружность с центром O и радиусом l.

а) Пусть $Q\neq 0$ — точка внутри S, а T — точка на S такие, что $OQ\perp QT$, а R точка на отрезке OQ, для которой $TR\perp OT$. Постройте чертеж и докажите, что $OQ\cdot OR=l^2$.

б) Пусть P — произвольная точка и P' точка на луче OP такая, что $OP\cdot OP'=l^2$. Приняв точку O за начало координат, докажите, что если точка P лежит на прямой $x=l/2$, то P' лежит на окружности радиусом l с центром $(l,\ 0)$.

4. Пусть $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, где $\theta\in\mathbf{R}$.

а) Докажите, что $R_\theta\cdot R_\varphi=R_\theta+R_\varphi$. Найдите все значения θ, для которых $R_\theta=J$, где J — единичная матрица.

б) Докажите, что $R_{-\theta}=(R_\theta)^{-1}$.

в) Пусть n — натуральное число. Докажите, что $R_\theta^n=J$ тогда и только тогда, когда $\theta=2\pi m/n$, где m — целое число.

г) Пусть $\theta=2\pi/n$, где n — натуральное число и $R_\varphi=A^{-1}R_0A$ для некоторой матрицы A. Докажите, что $\varphi=2\pi k/n$, где k — целое.

5. Пусть $z\neq 1$ — положительное число и $w=\dfrac{z+1}{z-1}$.

а) Докажите, что $z=\dfrac{w+1}{w-1}$.

б) Докажите, что если $z=ia$, где $a\in\mathbf{R}$, то $|w|=1$ и, наоборот, если $|w|=1$, то $z=i\bar{a}$, где $a\in\mathbf{R}$.

в) Докажите, что если $z=i\,\mathrm{tg}\,\theta$, то $w=e^{-2i\theta}$.

г) Выразите $\mathrm{tg}\,4\theta$ через $\mathrm{tg}\,\theta$.

6. а) Разложите на линейные множители многочлен x^2+2i.

б) Разложите x^4+4 на 4 линейных множителя.

в) Докажите, что x^4+4 является произведением двух квадратичных многочленов с целыми коэффициентами.

г) Для каких натуральных n число n^4+4 — простое?

7. Пусть S — множество действительных чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — целые, причем $a^2-2b^2=\pm1$. Докажите, что

а) если $r\in S$, то $1/r\in S$;

б) если $r\in S$ и $s\in S$, то $rs\in S$.

Найдите (подбором) число $r\in S$ такое, что $r>1$. Докажите, что S — бесконечное множество и что уравнение $x^2-2y^2=1$ имеет бесконечное число решений в целых числах.

Группа В

8. а) Вычислите

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2rx-\sin 2(r-1)x}{\sin x}\,dx,$$

где r — натуральное число.

Пользуясь этим результатом (или как-нибудь иначе), докажите, что при натуральном n

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx=2\left[1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}/2n-1\right].$$

б) Докажите, что

$$\int_0^\theta f(x)dx=\int_0^\theta f(\theta-x)dx.$$

в) Для любого $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ докажите, что

$$\int_0^\theta \ln(1+\mathrm{tg}\,\theta\cdot\ \mathrm{tg}\,x)dx=\int_0^\theta \ln\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}\,\theta\mathrm{tg}\,x}\right)dx,$$

и получите отсюда, что

$$\int_0^\theta \ln(1+\mathrm{tg}\,\theta\cdot\ \mathrm{tg}\,x)dx=-\theta\ln\cos\theta.$$

9. Пусть $m(a)$ наименьшее значение функции $f(x)=x^2-2a(x-2)-4a^2$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, где a — произвольное действительное число. Найдите $m(a)$ и постройте график этой функции. Найдите наибольшее значение $m(a)$.

10. Пусть $J(a)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-ax}}{1+x}\,dx$, где $a>0$. Пользуясь интегрированием по частям (или иначе), докажите, что для любого целого $N\geqslant 0$

$$J(a)=\sum_{r=0}^{N}\frac{(-1)^r r!}{a^{r+1}}+\frac{(-1)^{N+1}(N+1)!}{a^{N+1}}\int_0^\infty\frac{e^{-ax}dx}{(1+x)^{N+2}}.$$

Отсюда получите оценку

$$\frac{93}{648}<J(6)<\frac{95}{648}.$$

11. Проверьте, что функция $y=e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения

$$(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}-(2x+5)\frac{dy}{dx}+2y=0. \qquad (*)$$

Покажите, что подстановка $y=ue^{2x}$, где u — функция от x, приводит к дифференциальному уравнению относительно функции $w=du/dx$. Решите это уравнение относительно w и получите в качестве следствия общее решение уравнения (*).

Найдите решение (*), удовлетворяющее условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

12. Докажите, пользуясь графиком, что уравнение $x=\mathrm{tg}\,x$ имеет бесконечную последовательность положительных решений $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, где $\pi n<\alpha_n<\pi n+\pi/2$.

Затем докажите, также пользуясь графиком, что уравнение

$$\sin x=ax,\ x>0,$$

не имеет решений при $a>1$, имеет одно решение при $\cos\alpha_2<a<1$, имеет $2n-1$ решение при $\cos\alpha_{2n}<a<\cos\alpha_{2(n-1)}$ (при $n>1$).

Математика II

Группа А

1. В треугольнике ABC точка D на BC и E на AC таковы, что прямая AD перпендикулярна BC, а прямая BE перпендикулярна AC. Докажите, что треугольники ADC и BEC подобны.

Пусть BE пересекает AD в точке H, а CH пересекает AB в точке F. Докажите, что $AE/EB=HE/EC$.

Докажите, что прямая CF перпендикулярна AB.

Пусть точки X, Y, Z и W — середины отрезков BH, AB, AC и CH. Докажите, что

XY, AD и WZ параллельны. Докажите также, что параллельны YZ, XW и BC.

Докажите, что $XYZW$ — прямоугольник.

2. Рассмотрим окружность C_1, задаваемую в прямоугольной системе координат уравнением $x^2+y^2-2x\sec b+1=0$, где b — действительное число такое, что $0<b<\pi/2$.

Найдите центр A_1 и радиус r_1 окружности C_1.

Рассмотрите прямую l, проходящую через начало координат 0 и касающуюся окружности C_1 в точке P. Найдите длину отрезка OP и величину угла POA_1.

Рассмотрим затем окружность C_2, задаваемую уравнением $x^2+y^2-2y\operatorname{tg} a-1=0$, где $0<a<\frac{\pi}{2}$.

Найдите центр A_2 и радиус r_2 окружности C_2.

Выразите расстояние A_1A_2 через r_1 и r_2.

Пусть C_1 и C_2 пересекаются в точках R и S. Докажите, что углы A_1RA_2 и A_1SA_2 — прямые.

3. Три различные точки B, C, D, лежащие на плоскости, определяются тремя векторами $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ с общим началом O.

Докажите, что B, C и D лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\alpha\vec{b}+\mu\vec{c}+\nu\vec{d}=0$ для некоторых чисел α, μ, ν, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих условию $\alpha+\mu+\nu=0$.

Далее докажите, что точки B, C и D лежат на одной прямой и точка D делит BC в отношении $\gamma:\beta$ тогда и только тогда, когда

$$\bar{d}=(\beta\bar{b}+\gamma\bar{c})(\beta+\gamma)^{-1}.$$

Четвертая точка A плоскости определяется вектором $\overline{OA}=\bar{a}$ с тем же началом O и не лежит на прямой BC. Докажите, что всякая точка P, принадлежащая треугольнику ABC и лежащая на AD, задается вектором

$$\overline{OP}=\bar{p}=(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c})(\alpha+\beta+\gamma)^{-1},$$

где α — некоторое положительное число.

Если точке Q соответствует вектор $\vec{q}=\overline{OQ}$ такой, что

$$\vec{q}=(-\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})(-\alpha+\beta+\gamma)^{-1},$$

то точка Q лежит на прямой AP.

4. Пусть a и c — действительные числа, а b — комплексное число такое, что $ac<b\bar{b}$ ($\bar{b}$ — число, комплексно сопряженное с b).

Докажите, что множество точек комплексной плоскости $z=x+iy$, удовлетворяющих уравнению

$$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0,$$

являются окружностью при $a\neq 0$ и прямой при $a=0$.

В случае $a=0$ докажите, что если прямая касается единичной окружности $z\bar{z}=1$, то b и c удовлетворяют соотношению $c^2=ub\bar{b}$.

Докажите, что при преобразовании

$$z\to w=\frac{1}{\bar{z}}$$

а) точки единичной окружности неподвижны;

б) прямая, заданная уравнением $\bar{b}z+b\bar{z}+c=0$ и касающаяся единичной окружности, преобразуется в окружность, проходящую через начало координат. Чему равен радиус этой окружности?

Группа Б

5. Легкая лестница длиной l прислонена к стене под углом θ от вертикали.

Человек весом W стоит на лестнице на высоте Y от пола.

Докажите, что в момент, когда лестница начинает скользить, нормальные реакции R_1 и R_2 пола и стенки равны соответственно

$$R_1=\frac{W}{1+\mu_1\mu_2};\ R_2=\frac{\mu_1 W}{1+\mu_1\mu_2},$$

где μ_1 и μ_2 — коэффициенты трения лестницы о пол и стену, соответственно.

Докажите, что лестница будет соскальзывать, только если

$$Y>\frac{\mu_1 l\cos\theta(\mu_2+\operatorname{ctg}\theta)}{1+\mu_1\mu_2}.$$

Отсюда покажите, что человек сможет взобраться на самый верх лестницы, если

$$\operatorname{tg}\theta<\mu_1.$$

6. Теннисист, находящийся в точке $x=0$ на оси Ox посылает мяч в стенку, перпендикулярную оси Ox в точке $x=X$. Пусть при своем n-м ударе он посылает мяч с высоты h_n со скоростью v_n под углом θ к горизонту. На какой высоте над осью Ox мяч ударится о стенку (сопротивлением воздуха пренебречь)? При отражении от стенки вертикальная составляющая скорости мяча не меняется, а горизонтальная умножается на коэффициент восстановления e. Докажите, что высота h_{n+1}, на которой окажется мяч при возвращении к теннисисту, удовлетворяет соотношению

$$h_{n+1}=h_n+\left(1+\frac{1}{e}\right)X\operatorname{tg}\theta-\frac{gX^2}{2v_n^2\cos^2\theta}\left(1+\frac{1}{e}\right)^2$$

(перед возвращением мяч не ударяется о горизонтальную поверхность).

Докажите, что теннисист может поддерживать «стационарный режим» (т. е. $h_{n+1}=h_n$ при всех n), если он посылает мяч со скоростью

$$v=(g(1+e)X/e\sin 2\theta)^{1/2}.$$

7. Частица массой m прикреплена с помощью легкой упругой нити жесткостью α и длиной a к другой частице массой M. В начальный момент обе частицы находятся в одной точке O. Частицу массой m бросают со скоростью v, а частицу массой M отпускают. Пусть x и y — расстояния от первой и второй частиц до точки O соответственно в момент времени t. Докажите, что расстояние между частицами станет равным a через время a/v; найдите положения частиц и их скорости в этот момент. Докажите, что при $x-y>a$, x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g-\frac{\alpha}{ma}(x-y-a),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g + \frac{\alpha}{ma}(x - y - a).$$

Выполнив замену переменной $z = x - y - a$ (или иначе), докажите, что нить в следующий раз достигнет длины a через время

$$\pi\left(\frac{\alpha}{a}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

8. Пуля летит в горизонтальном направлении со скоростью v_0, ударяется изнутри о вертикальную стенку круглой арены и продолжает отражаться от стенок арены. Пренебрегая сопротивлением воздуха и притяжением Земли и считая, что тангенциальная составляющая скорости пули при рикошете не меняется, а радиальная составляющая скорости умножается на e при каждом рикошете, докажите, что

$$\alpha_n = \mathrm{tg}^{-1}(e^{-n}\mathrm{tg}\,\alpha_0),$$

где α_n — угол, образуемый траекторией пули с радиусом арены после n-го отражения, а α_0 — начальный угол отражения.

Выведите отсюда, что если $e < 1$, то $\alpha_n \to \frac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$.

Пусть θ_n — угол, образуемый направлением радиуса n-й точки соударения пули и стены с некоторым фиксированным направлением.

Докажите, что $\theta_{n+1} = \theta_n + \pi - 2\alpha_n$. Докажите, что $\theta_n = \theta_1 + (n-1)(\pi - 2\alpha_0)$ при $e = 1$. Отсюда получите, что в этом случае пуля в конце концов вернется в точку первого соударения тогда и только тогда, когда существуют такие целые p и q, что $2\alpha_0/\pi = p/q$.

Группа В

9. Люстра состоит из семи ламп, расположенных по окружности. В течение года каждая из ламп может перегореть с вероятностью 1/2. Предполагая, что лампы перегорают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что к концу года перегорят не менее чем четыре лампы.

Если перегорели 3 лампы, то какова вероятность, что никакие две из них не были соседними?

Я решил, что в конце года буду заменять все перегоревшие лампы, лишь если какие-то две из них окажутся соседними. Найдите вероятность этого события. Если это произойдет, то какова вероятность, что мне потребуется больше двух ламп? (Полная оценка будет выставлена лишь в случае ясного и точного объяснения, какие события должны быть рассмотрены на каждой стадии решения.)

10. Дует сильный западный ветер. Дерево T высотой 20 м может быть вырвано с корнем и повалено. Пусть B — угол возможного направления падения дерева с направлением север — юг. Известно, что

$$P(0 \leqslant B \leqslant 180x) = 3x^2 - 2x^3;\ 0 \leqslant x \leqslant 1.^{*)}$$

*) Через $P(0 \leqslant B \leqslant 180x)$ обозначена вероятность того, что градусная мера угла направления падения дерева с направлением север — юг лежит в указанных пределах.

Докажите, что направления падения дерева на север или на юг относительно направления на восток равновероятны.

Железная дорога идет прямо на север на расстоянии $10\sqrt{2}$ к востоку от дерева. Найдите вероятность того, что ствол дерева попадет на рельсы.

В 50 м к северу и в 50 м к югу от дерева T находятся еще два таких же дерева. Каждое из деревьев независимо от остальных падает от ветра с вероятностью 4/5. Предполагая, что железная дорога заблокирована по крайней мере одним деревом, найдите вероятность того, что более чем одно дерево придется убирать с путей.

11. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ независимые случайные величины с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, а n — положительное целое число. Найдите математические ожидания и дисперсии величин: а) nx_1, б) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Массы стандартных европейских яблок распределены по нормальному закону со средним значением 125 г и средне-квадратичным уклонением 11,6 г. Ленивый британский торговец фруктами продает яблоки предположительно по 40 пенсов за фунт, но в действительности берет 40 пенсов за пакет с четырьмя случайно выбранными яблоками. Вычислите среднее значение и дисперсию веса пакета.

Торговый инспектор регулярно инкогнито посещает магазин и каждый раз покупает один пакет. Какова вероятность p, что при одном визите в магазин он купит пакет, весящий меньше фунта?

Допустим, что в первый раз он обнаружит «недовес» при K-м визите. Выразите $P(K = k)$ для $k = 1, 2, \ldots$ через p, а затем найдите математическое ожидание этого события. Предполагая, что инспектор покупает один пакет из двухсот, найдите ожидаемое число пакетов, проданных торговцем до этого, а отсюда получите ожидаемое число пакетов, проданных с «недовесом». (Считайте при этом, что 1 кг = 2,2 фунта. Можете также пользоваться тем, что $1 + 2\theta + 3\theta^2 + \ldots = (1 - \theta)^{-2}$ при $|\theta| < 1$.)

12. Установите точные предположения, при которых число случаев данного заболевания в некоторой группе населения хорошо описывается распределением Пуассона.

В некотором избирательном округе S вблизи от ядерной установки наблюдались четыре случая редкого заболевания. По средним данным национальной статистики, было подсчитано, что число X случаев в округе S_1 имеет математическое ожидание $\lambda = 0{,}25$.

Полагая, что X распределено по Пуассону с ожиданием $\lambda = 1/4$, вычислите $P(X = 4)$ и $P(X \geqslant 4)$. Какая-нибудь из этих вероятностей свидетельствует о том, что риск в S_1 выше среднего? Коротко объясните ваши доводы.

Предположим, что медицинский статистик может разделить регион, содержащий S_1, на n субрегионов $S_1, S_2, \ldots, S_n$ таким образом, что в каждом из них ожидаемое число случаев было бы равно λ — тому же значению, что в среднем по стране.

Полагая, что средняя частота действительно отражает риск заболевания, вычислите вероятность того, что по крайней мере в одном из субрегионов будет по меньшей мере 4 случая заболевания при $n=225$. Повторите вычисления для $n=23\,900$ (числа́, описывающего всю Англию и Уэльс). Объясните значение обнаруженных 4-х случаев в избирательном округе S_1.

Группа Г

13. Докажите следующие неравенства (x, y и z — произвольные положительные действительные числа):

а) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$;

б) $\min(1, x^3, y^4, z^5) \leqslant xyz$, где $\min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ означает наименьшее из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$;

в) $x \ln x \geqslant -e^{-1}$.

14. а) Функция $f(x)$ равна 1 для $0 \leqslant x \leqslant 1$, равна 1/2 при $1 < x \leqslant 2$, вообще равна $1/n$ при $n-1 < x \leqslant n$, $n=3, 4, \dots$ Постройте на одном чертеже графики функции $f(x)$ при $x \geqslant 0$ и $y=\frac{1}{x}$ при $x>0$.

б)*) Получите из графиков, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{m} \leqslant \ln m \quad \text{для целых} \quad m \geqslant 2.$$

в) Аналогично докажите, что

$$\ln m \leqslant 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m-1} \quad \text{для целых} \quad m \geqslant 2.$$

г) Замените $1/x$ другой функцией и примените аналогичный метод для доказательства неравенств

$$\ln(m-1)! \leqslant m \ln m - m + 1 \leqslant \ln m!$$

для любого целого $m \geqslant 2$.

*) Сравните с решением задачи М1110 («Квант» № 11—12, 1988).

15. Пусть m — натуральное число.

а) Докажите, что биномиальный коэффициент C_{2m}^m удовлетворяет неравенству $C_{2m}^m \leqslant 4^m$. Указание: рассмотрите бином $(1+1)^{2m}$.

б) Используя формулу

$$C_{2m}^m = \frac{2m(2m-1)\dots(2m-(m-1))}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot m},$$

докажите, что C_{2m}^m делится на каждое простое число p, такое что $m<p\leqslant 2m$.

в) Используйте пункты а) и б) для доказательства неравенства $p<4^m$, где p — произведение всех простых чисел, для которых $m<p\leqslant 2m$.

г) Докажите, что если m является степенью двойки, то $Q_m \leqslant 4^m$, где Q_m — произведение всех простых чисел $p \leqslant m$. Указание: используйте пункт в) для оценки сверху отношения Q_{2m}/Q_m.

16. Буквами a, b, c, d обозначены 4 различных натуральных числа, ни одно из которых не равно 1. Рассмотрите следующие утверждения:

а) $b=a+7$ и $b<c<d$;

б) $ab=cd$;

в) a и b — простые числа;

г) b делит a.

Докажите, что лишь два из этих утверждений могут быть справедливы одновременно.

Редакция благодарит чл.-корр. АН СССР В. И. Арнольда, любезно предоставившего этот материал.

Публикацию подготовил А. А. Егоров

Нам пишут

Еще раз о золотом сечении

Золотым сечением называется число $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Это число издавна интересует не только математиков, но и художников, скульпторов, архитекторов. Считается, что золотому сечению подчиняются пропорции хорошо сложенного человека.

Если группе людей предложить выбрать самый гармоничный из большого набора прямоугольников, большинство выберет тот, стороны которого относятся как φ.

Известны две красивые формулы для золотого сечения:

$$\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}};$$

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}.$$

Наши читатели *А. М.* и *В. М. Соломины* из Киева предлагают еще две формулы, которые мы предлагаем доказать вам:

$$\varphi=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\dots}}}};$$

$$\varphi=2-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2+\dots}}}.$$

XII Турнир юных физиков

Турнир проводится с сентября 1989 г. по февраль 1990 г. в четыре этапа:

I. **Заочный коллективный конкурс** (сентябрь—ноябрь 1989 г.).

Задания заочного коллективного конкурса напечатаны в этой статье и в специальной брошюре, которая разослана во все областные и республиканские отделы народного образования (или Министерства народного образования союзных республик), в обкомы и в ЦК ЛКСМ союзных республик.

Принять участие в заочном конкурсе ТЮФ-XII может любой коллектив школьников.

Решения задач заочного конкурса необходимо отправить не позднее 15 ноября 1989 г. по адресу: 119899, Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Оргкомитет ТЮФ-XII. В конверт вложите анкету, в которой укажите:

1. Почтовый адрес и телефон школы, фамилию, имя, отчество руководителя команды.

2. Список авторов решений (имена пишите полностью).

Решение каждой задачи оформляйте отдельно. В начале решения каждой задачи обязательно укажите город, номер школы, фамилии авторов решения. К экспериментальным задачам приложите подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Рукописи, присланные в Оргкомитет, не возвращаются.

II. **Городские, областные и республиканские турниры юных физиков** (декабрь 1989 г.).

Московский ТЮФ-XII будет проведен физическим факультетом МГУ для школ Москвы и Московской области по заданиям заочного коллективного конкурса в ноябре—декабре 1989 г.

Турниры юных физиков в других городах, областях и республиках проводятся местными Оргкомитетами или инициативными группами. Физический факультет МГУ готов оказать организационную и методическую помощь в проведении таких турниров.

III. **Всесоюзный турнир юных физиков** (январь 1990 г.).

Будет проведен по заданиям заочного коллективного конкурса с дополнениями и разъяснениями, которые будут разосланы участникам Турнира в декабре 1989 г. Заявки на участие во Всесоюзном турнире юных физиков следует присылать по вышеуказанному адресу не позднее 15 ноября 1989 г.

IV. **Международный турнир юных физиков.**

Будет проведен с 26 февраля по 3 марта 1990 г. в городе Кладно (ЧССР). В нем примет участие команда СССР в составе 5 школьников.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-XII

Не станет он искать побед.
Он ждет, чтоб высшее начало
Его все чаще побеждало,
Чтобы расти ему в ответ.

Р. М. Рильке

1. «Придумай сам» — физический фотоконкурс. Представьте на конкурс фотографии быстропротекающего физического процесса. В пояснениях к фотографиям раскройте их физическую ценность.

2—4. «Шарик и поршень». Горизонтальный поршень колеблется вверх-вниз. Координата поверхности поршня определяется выражением $x = x_0 \cos \omega t$. В произвольный момент времени на поршень роняют без начальной скорости с высоты H маленький шарик (рис. 1).

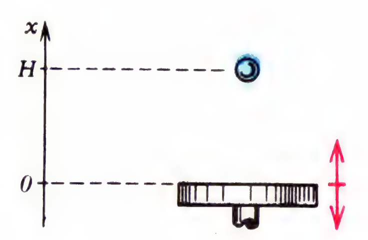


Рис. 1.

2. На какую высоту отскочит шарик после первого соударения с поршнем? В этом случае считайте, что соударение абсолютно упругое и $H > x_0$.

3. После большого числа соударений система «забудет» начальные условия. Оцените, на какую максимальную высоту может отскочить шарик после многих соударений. Какова будет средняя высота отскока? Считайте, что при соударениях не происходит разрушения поверхностей шарика и поршня.

4. Пусть теперь на некоторой высоте H над поршнем находится потолок. В этом случае возможны стационарные решения. Отыщите некоторые из них и исследуйте их устойчивость. Для численных оценок считайте, что $H = 1$ м, $H \gg x_0$, $g = 10$ м/с^2 и что при соударениях шарика

с поршнем и с потолком коэффициент восстановления $k=0{,}8$.

5. «Планета». Каким может быть максимальный размер планеты, имеющей форму куба?

6. «Испарение — конденсация». В П-образной запаянной стеклянной трубке находится вода (рис. 2).

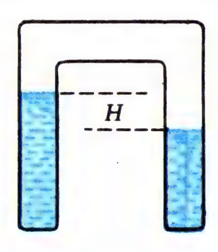


Рис. 2.

Если первоначально в коленах трубки установить некоторую разность уровней H, то со временем уровни воды в коленах выровняются. Оцените скорость выравнивания при данных H и температуре $T=\mathrm{const}$.

а) В трубке нет воздуха.

б) В трубке есть воздух при нормальном давлении.

7. «Цилиндр в трубе». В длинной трубке, заполненной водой, движется с постоянной скоростью по направлению к закрытому концу цилиндр (рис. 3).



Рис. 3.

Внутренний диаметр трубки D, диаметр цилиндра d, длина цилиндра L, $D-d=h$, $L>D$, $h\ll D$. Как зависит сила сопротивления движению цилиндра от скорости цилиндра? Сравните теоретические оценки с результатами эксперимента.

8. «Сегнерово колесо». Сегнерово колесо, помещенное в воду, вращается за счет реактивной силы струй, вытекающих из сопел. Будет ли вращаться такое колесо в обратном режиме, т. е. если вода не вытекает, а втекает (всасывается) в сопла колеса?

Рекомендуем обратиться к книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» (частичный перевод в журнале «Наука и жизнь», 1986, № 12).

9. «Колесо Франклина». Вращение металлической вертушки с остриями в известном опыте «колесо Франклина» объясняется наличием «электрического ветра». Объясните, почему вращается эта вертушка, если ее поместить между пластинами плоского конденсатора и заряжать конденсатор от электрофорной машины. Будет ли вращаться диэлектрический диск, помещенный вместо колеса Франклина между пластинами плоского конденсатора, заряжаемого от электрофорной машины?

10. «Электрет». 150 лет назад М. Фарадей предсказал электреты как электростатические аналоги постоянного магнита. Изготовьте электрет и исследуйте его свойства.

11. «Цвета облаков».

Тучки небесные, вечные странники!
Степью лазурною, цепью жемчужною
Мчитесь вы...

М. Ю. Лермонтов

Объясните наблюдаемые цвета облаков и туч.

12. «Граница облака». Наблюдаемая граница облака часто бывает резко очерчена. Особенно хорошо это можно видеть с борта самолета. Оцените «размытость» границы облака.

13. «Облако космонавтов» (фантазия с физическим смыслом). Большое число космонавтов образуют в открытом космосе «облако космонавтов». Первоначально каждый из них имеет при себе футбольный мяч. С какого-то момента времени космонавты начинают перебрасываться друг с другом этими мячами (при этом ни один мяч не теряется). Опишите эволюцию «облака космонавтов». Не желая ограничивать вашей фантазии, предоставляем вам самим выбор начальных условий, правил переброски мячей и других параметров «облака». Важно только следующее: выбор модели должен быть логически обоснован; выводы должны быть подкреплены количественными оценками; количество описанных вами вариантов не должно быть более двух.

14. «Фрактал?». Бабушка сматывает шерстяную нить в сферический клубок. Как зависит масса клубка от его диаметра?

15. «Свет в трубе». Посмотрите на свет через стеклянную трубку (диаметр трубки ≈ 5 мм, длина ≈ 25 см). Объясните происхождение наблюдаемых колец.

16. «Интерференция». Возьмите две хорошо отмытые от эмульсии стеклянные фотопластинки (9×12 см). Если их плотно прижать друг к другу (притереть), то в отраженном свете можно увидеть интерференционные полосы. Если положить пластинки на стол и надавить пальцем на середину верхней пластинки, то полосы приобретают вид концентрических колец. Если палец убрать, то кольца начнут «разбегаться». Проделайте этот опыт и объясните наблюдаемые явления. Оцените теоретически скорость «разбега-

ния» колец после снятия нагрузки.

17. «Научная организация труда — НОТ». Вам предстоит забить 1989 одинаковых гвоздей ($l=50$ мм, $\varnothing=2{,}5$ мм) в деревянный брус. Какой молоток вы выберете для скорейшего и качественного выполнения этой работы? (Более определенно — какова масса молотка и длина его ручки?)

а) Брус сосновый.

б) Брус дубовый.

Задания подготовили:
С. Д. Варламов, Т. П. Корнеева, А. Ю. Кусенко, М. Ю. Николаев, А. В. Рахманов, М. В. Столяров, М. М. Цыпин, Е. Н. Юносов.

Участникам и организаторам Турниров

В настоящее время Турнирам юных в нашей стране предоставлены широкие возможности. Госкомитет СССР по народному образованию и ЦК ВЛКСМ приняли постановление «О развитии турнирной формы работы со школьниками» от 09.12.88 г. На основании этого постановления в 1989 году уже проведены: II Всесоюзный и Международный турнир юных физиков, Всесоюзные зимняя и летняя школы для участников и организаторов Турниров. В августе 1989 г. в Уфе состоится Всесоюзная летняя школа-сессия, на которой впервые будут проведены Турниры юных химиков, математиков, геологов и юных исследователей космоса. Однако для широкого распространения и развития Турниров директивных указаний мало. Необходимо, чтобы в активную, конкретную работу включились творческие коллективы организаторов Турниров в различных регионах нашей страны. Такими коллективами могут стать инициативные группы студентов, учителей, работников просвещения, преподавателей вузов, комитетов комсомола школ, научных учреждений и вузов, школьников старших классов. Организаторы Турниров юных могут рассчитывать на помощь органов народного образования, обкомов комсомола и ЦК ЛКСМ республик.

В октябре 1989 г. в Одессе будет проведен Всесоюзный семинар для организаторов Турниров. В нем примут участие представители коллективов тех регионов, где уже имеется опыт проведения Турниров (среди них: Москва, Одесса, Уфа, Томск, Новосибирск, Краснодар, Красноярск), а также коллективов, которые включаются в эту работу. Заявки на участие в семинаре следует присылать по адресу: Москва, ЦК ВЛКСМ, отдел учащейся молодежи, ТЮФ или по адресу Оргкомитета ТЮФ.

Советы участникам и организаторам Турнира напечатаны в журнале «Квант» № 8 за 1986, 1987 и 1988 г. Оргкомитет ТЮФ по вашему запросу вышлет вам очередную брошюру о Турнире.

Желаем всем будущим участникам и организаторам Турниров удачи и творческих успехов!

Зам. председателя Оргкомитета
Е. Н. Юносов

Вечерняя физическая школа при МГУ

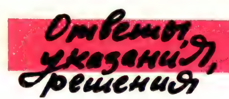
Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (и приложить две фотокарточки размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.



Удивительные приключения периодических дробей

1. Доказательство леммы. Для каждого натурального n, не делящегося на q, вычислим остаток от деления числа np на q. Пусть r — наименьший из этих остатков; в частности, $Ap=Bq+r$ при некоторых A и B. Нам нужно показать, что $r=1$. Предположим, что $r>1$, и поделим q на r с остатком: $q=mr+r'$, $r'<r$ (и $r'>0$, ибо в противном случае p и q оба делились бы на r и не были бы взаимно просты). Тогда $A(m+1)p=B(m+1)q+mr+$ $+r=B(m+1)q+q+(r-r')$, откуда видно, что остаток от деления числа $A(m+1)p$ на q равен $r-r'<r$, что противоречит минимальности остатка r. Лемма доказана.

Заметим, что в доказанной лемме обязательно A взаимно просто с q, а B взаимно просто с p.

Вывод утверждения из леммы. Пусть $2^a5^bA=Bm'+1$. Тогда

$$\frac{1}{m}=\frac{2^a5^bA-Bm'}{2^a5^bm'}=\frac{A}{m'}-\frac{B}{2^a5^b}.$$

В последней разности уменьшаемое есть десятичная дробь, имеющая период такой же длины, как $1/m'$ (см. упражнение 2), а вычитаемое есть конечная десятичная дробь с c знаками после запятой (оно равно $2^{c-a}B/10^c$ или $5^{c-b}B/10^c$). Отсюда немедленно следует наше утверждение.

2. При умножении десятичной дроби $1/q$ на p ее период мог бы только уменьшиться. Предположим, что он уменьшился. Пусть A и B такие, что $Ap=Bq+1$. При умножении дроби p/q на A период может только еще уменьшиться. Но при этом умножении получается $(Bq+1)/q=B+(1/q)$ — период имеет такую же длину, как у исходной дроби. Противоречие.

3. Можно считать дробь несократимой. Если q не делится на 2 и на 5, то это прямо вытекает из следствия, доказанного в статье (и, если угодно, упражнения 2). Если делится, то поделим q на все возможные двойки и пятерки; пусть получится q'. В силу формулы, доказанной выше при решении упражнения 1, наша дробь имеет такой же период, как некоторая дробь со знаменателем q'.

4. Пусть n_1 — наименьшее число девяток, составляющих число, делящееся на p_1, а n_2 — наименьшее число девяток, составляющих число, делящееся на p_2. Пусть, далее, n — наименьшее общее кратное чисел n_1 и n_2. Мы должны доказать, что, во-первых, число из n девяток делится на p_1p_2 и, во-вторых, никакое число, составленное из меньшего количества девяток, на p_1p_2 не делится. Но первое очевидно, а второе доказывается точно так же, как теорема 2 статьи.

5. 1012658227848, 1139240506329. Это — периоды дробей 8/79 и 9/79; при перенесении последней цифры в начало оба увеличиваются в 8 раз.

6. Пусть p — полнопериодное простое число. Период дроби $1/p$ равен $(10^{p-1}-1)/p$. Возведем его в квадрат и отделим последние $p-1$ цифр:

$$\left(\frac{10^{p-1}-1}{p}\right)^2=A\cdot 10^{p-1}+B,\ B<10^{p-1}.$$

Имеем

$$A+B=\frac{10^{p-1}-1}{p}\left(\frac{10^{p-1}-1}{p}-Ap\right).$$

Таким образом, $A+B$ делится на период дроби $1/p$. Легко понять, что частное не превосходит p (доказательство мы оставляем читателю), причем оно равно p в том и только в том случае, если период дрби $1/p$ сам делится на p; бывает ли такое для полнопериодных p, мы не знаем. В этом случае $A+B$ равнялось бы $10^{p-1}-1$. Если же частное меньше p, то $A+B$ получается из периода круговой перестановкой цифр.

Награда

Число монет равно сумме геометрической прогрессии:

$$n=1+2+4+8+...+2^{17}.$$

Чтобы найти n, запишем:

$$2n=2+4+8+...+2^{17}+2^{18}.$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$n=2^{18}-1=262\,143.$$

Мощность в цепи постоянного тока

1. $U=\mathscr{E}R/(R+r)$; $P_{\text{внут}}=\mathscr{E}^2r/(R+r)^2$; см. рис. 1.

2. $P_{\text{внут}}=I^2r$; см. рис. 2.

3. $P_{\text{внут}}=\mathscr{E}^2r/(R+r)^2$; см. рис. 3.

4. $P_{\text{потр}}=(U^2-U\mathscr{E})/r$; $P_{\text{подз}}=(U\mathscr{E}-\mathscr{E}^2)/r$; $P_{\text{т}}=(U-\mathscr{E})^2/r$; $\eta=\mathscr{E}/U$; см. рис. 4.

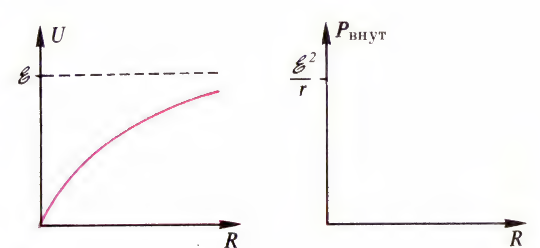


Рис. 1

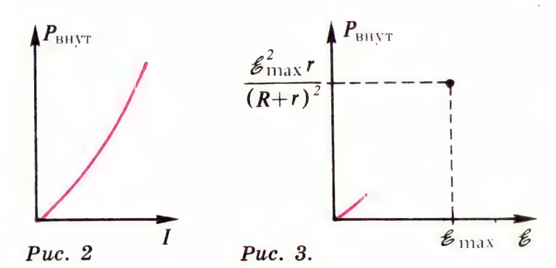


Рис. 2

Рис. 3.

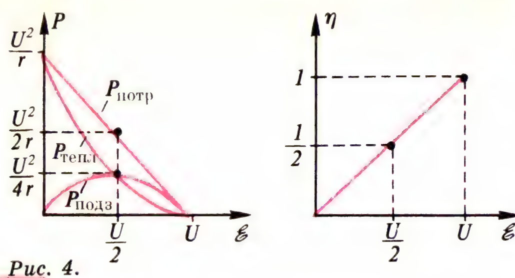


Рис. 4.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

2. Длина Слоненка — 11 Попугаев, Верблюжонка — 9 Попугаев, Теленка — 8 Попугаев, Мартышки — 6 Попугаев, Котенка — 3 Попугая.

3. Указанное равенство следует из того, что $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ и $a^3+c^3=(a+c)\times$ $\times(a^2-ac+c^2)=(a+c)(a^2-a(a+b)+(a+b)^2) =$ $=(a+c)(a^2+ab+b^2)$.

4. Таких наборов монет два: (2, 2, 3, 3), (1, 3, 3, 3), (1, 1, 3, 5), (1, 2, 2, 5) — в сумме получается 40 копеек; и (2, 2, 2, 2), (1, 2, 2, 3), (1, 1, 3, 3), (1, 1, 1, 5) — в сумме получается 32 копейки.

5. См. рис. 5.

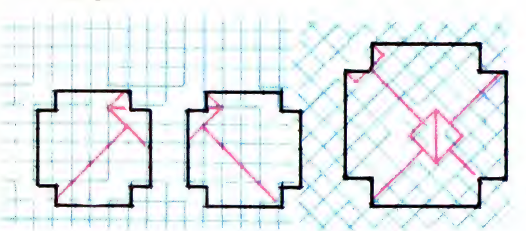


Рис. 5.

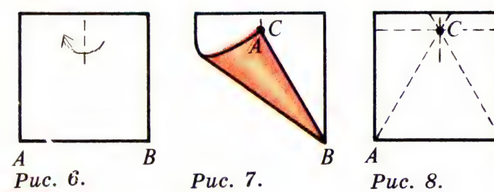


Рис. 6. *Рис. 7.* *Рис. 8.*

4-я с. обложки
(см. «Квант» № 7)

Для построения сети сгибов, позволяющих сложить из бумажного квадрата правильный тетраэдр, главное — построить правильный треугольник ABC на стороне AB квадрата. Для этого листок перегибается пополам и разгибается так, чтобы наметилась часть линии сгиба (рис. 6). Затем вершина A помещается на эту линию так, чтобы край AB листа плотно прилегал к плоскости листа (рис. 7). Точка линии сгиба, на которую попадает эта вершина, и есть точка C. Прижав угол A в точке C, отгибаем верхнюю часть квадрата по линии, проходящей через C параллельно основаниям. Тем самым будет намечена точка C (рис. 8), после чего листок сгибается по линиям BC и AC.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, С. Ф. Лухин, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор В. П. Сорокина

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.05.89. Подписано к печати 20.07.89
Т-12665. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,83. Тираж 183 306 экз.
Заказ 1183. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Задачи

М1176 — М1180, Ф1183 — Ф1187

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы.

Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1176» или «Ф1183». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача М1180 предлагалась на заключительном этапе XXIII Всесоюзной олимпиады по математике (Рига, 1989).

М1176. Два квадрата $AKBM$ и $CNDL$ расположены на плоскости так, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, причем точки K и L лежат внутри этого четырехугольника. Докажите, что площадь этого четырехугольника равна $(MN^2-KL^2)/4$.

С. А. Столяров

М1177. Докажите, что для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не превосходящих 1, выполнено неравенство

$$(1+x_1)^{1/x_2}(1+x_2)^{1/x_3}(1+x_3)^{1/x_4}\ldots(1+x_n)^{1/x_1}\geqslant 2^n.$$

К. П. Кохась, В. М. Телевка

М1178. а) Докажите, что для нетупоугольного треугольника ABC со сторонами a, b, c, радиусом вписанной окружности r и описанной — R выполнено неравенство

$$2(R+r)\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

б) При каком условии это неравенство обращается в равенство?

З. А. Скопец

М1179. Найдите a_{1000}, если $a_1=0$ и при $n=1, 2, 3, \ldots$

а) $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}(a_n+1)$;

б) $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(a_n+1)$;

в) $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}(a_n+1)$.

Б. А. Вертгейм

М1180. На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B, на другой — C и D. Отрезок AC проходит через общую точку сфер. Отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую AC равны.

И. Ф. Шарыгин

Ф1183. Автобус движется с постоянной скоростью $u=60$ км/ч, подолгу стоя на остановках. На улице ветер и идет дождь. Дождевые капли образовали на боковом стекле автобуса такую картину, как на рисунке 1. Скорость и направление ветра не меняются. Какова скорость падения капель дождя? Что можно сказать о скорости ветра? Дорога прямая, автобус не разворачивается.

А. В. Андрианов

Ф1184. Железный пруток цилиндрической формы длиной 10 см нагрели в пламени газовой горелки. Температура горячего конца прутка оказалась 700 °С, на расстоянии 1 см от него — 500 °С, 2 см — 300 °С, 3 см — 200 °С, 5 см — 150 °С, температура другого

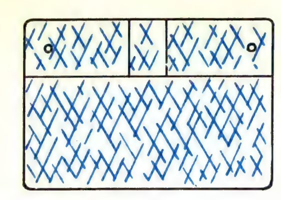


Рис. 1.

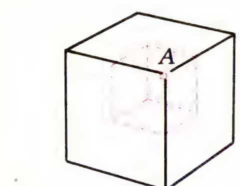


Рис. 2.

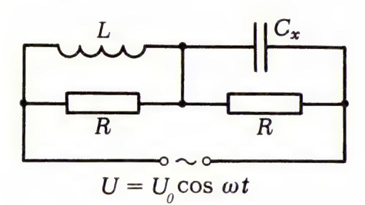


Рис. 3.

конца прутка — 100 °С. Через 1 минуту температура выравнялась и оказалась равной 200 °С. Оценить количество теплоты, которое пруток за это время потерял. Удельная теплоемкость железа 460 Дж/(кг·К), масса прутка 15 г.

А. Р. Зильберман

Ф1185. Однородно заряженный куб создает в своей вершине электрическое поле напряженностью E_0. Из куба удаляют кубик вдвое меньших размеров (рис. 2). Чему теперь будет равна напряженность поля в точке A?

И. Ю. Потеряйко

Ф1186. При какой величине емкости конденсатора C_x в схеме, приведенной на рисунке 3, сдвиг фаз между подаваемым напряжением и током во внешней цепи будет равен нулю при любой частоте источника? Индуктивность катушки L, сопротивление каждого резистора R. Все элементы цепи считать идеальными.

В. Е. Скороваров

Ф1187. Сани длиной $L=2$ м и высотой $H=0{,}5$ м едут по прямой со скоростью $v=10$ м/с. На расстоянии $d=10$ м от дороги установлен штатив с фотоаппаратом, и съемку производят в момент максимального сближения.

Фотоаппарат имеет однолинзовый объектив с фокусным расстоянием $F=5$ см. Выдержка (т. е. время, в течение которого засвечивается каждый участок фотопленки) отрабатывается в этом фотоаппарате при помощи щелевого затвора, который работает следующим образом. Вдоль кадра вблизи от пленки движется с постоянной скоростью $v_0=1$ м/с вертикальная щель, ширину которой можно менять до получения нужной выдержки. Размер кадра 24×36 мм. Каким окажется отношение длины к высоте у полученного на пленке достаточно резкого изображения саней?

М. Г. Гаврилов



Решения задач

М1151 — М1154, Ф1163 — Ф1167

М1151. *а) Докажите равенство (где $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$)*

$$\frac{1\cdot2!}{2}+\frac{2\cdot3!}{2^2}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2.$$

б) Найдите сумму

$$\frac{1\cdot3!}{3}+\frac{2\cdot4!}{3^2}+\ldots+\frac{n(n+2)!}{3^n}.$$

а) Это равенство легко доказывается по индукции. При $n=1$ оно верно: $\frac{1\cdot2!}{2}=\frac{3!}{2}-2=1$. Предположив, что оно доказано для $n=k$, проверим, что оно верно и для $n=k+1$:

$$\frac{1\cdot2!}{2}+\frac{2\cdot3!}{2^2}+\ldots+\frac{k(k+1)!}{2^k}+\frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{(k+2)!}{2^k}+\frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}}-2=\frac{(2+k+1)(k+2)!}{2^{k+1}}-2=$$

$$=\frac{(k+3)!}{2^{k+1}}-2.$$

б) Ответ: $\frac{(n+3)!}{3^n}-6$. Можно доказать это по ин-

Но $OB=OD=R$, $\angle BOD=2\angle BAD=4\alpha$ (центральный угол вдвое больше соответствующего вписанного), $IB=r/\sin\beta$, $ID=r/\sin\delta=r/\cos\beta$ (см. рисунок) и, как мы показали, $\angle BID=\pi/2+2\alpha$. Следовательно,

$$\frac{\rho(O, BD)}{\rho(I, BD)}=\frac{R^2\sin 4\alpha\sin\beta\cos\beta}{r^2\sin(\pi/2+2\alpha)}=$$

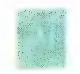
$$=\frac{R^2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin 2\beta}{r^2\cos 2\alpha}=\frac{R^2}{r^2}\sin 2\alpha\sin 2\beta.$$

Из симметрии задачи ясно, что и отношение $\rho(O, AC)/\rho(I, AC)$ равно той же величине, поэтому $\rho(O, BD)/\rho(O, AC)=\rho(I, BD)/\rho(I, AC)$, что и требовалось доказать.

Вообще, «вписанно-описанный» четырехугольник имеет целый ряд красивых свойств. Приведем некоторые из них, тесно связанные с данной задачей.

Пусть Q_1 — четырехугольник с вершинами в точках касания вписанно-описанного четырехугольника $ABCD$ с вписанной в него окружностью, а Q_2 — четырехугольник, ограниченный перпендикулярами к отрезкам IA, IB, IC, ID в их концах. Тогда 1) диагонали Q_1 перпендикулярны и пересекаются в той же точке P, что и диагонали $ABCD$; 2) четырехугольники Q_1 и Q_2 гомотетичны, причем центр гомотетии лежит на прямой PI; 3) на этой же прямой лежит центр описанной окружности четырехугольника Q_2 и центры тяжести четырехугольников Q_1 и Q_2.

В. Н. Дубровский



Ф1163. *Из-за малого коэффициента трения автомобиль не может двигаться по льду с ускорением, превосходящим по модулю $a=0{,}5$ м/с^2. По условиям соревнования водителю необходимо из точки A за наименьшее время попасть в точку B, находящуюся на прямой, перпендикулярной направлению начальной скорости автомобиля (рис. 1). Каково минимальное возможное время, если расстояние $AB=375$ м, а начальная скорость $v=10$ м/с? По какой траектории при этом должен двигаться автомобиль? Ответьте на аналогичные вопросы для случая, когда финиш находится в точке C, $BC=200$ м.*

Перейдем в систему отсчета, в которой автомобиль в начальный момент времени покоится, а точка B движется с постоянной скоростью v. В этой системе отсчета автомобиль для скорейшей встречи с точкой B, очевидно, должен двигаться по некоторой прямой с постоянным ускорением, равным a. Направление прямой определяется тем, что в некоторой точке D должна произойти встреча. Для треугольника ABD (рис. 2), обозначив $AB=b$, имеем

$$b^2+(vt)^2=\left(\frac{at^2}{2}\right)^2.$$

Решая это уравнение, находим

$$t=\sqrt{\frac{2v^2}{a^2}+\sqrt{\left(\frac{2v^2}{a^2}\right)^2+\frac{4b^2}{a^2}}}=50\text{ с}.$$

Поскольку оптимальное движение автомобиля является равноускоренным, его траектория в системе отсчета, связанной с землей, будет параболой.

Стратегия для скорейшей встречи с точкой C аналогична разобранной выше. Однако для нахождения времени до встречи в точке E (рис. 3) придется решать уравнение четвертой степени общего вида

$$b^2+(vt+c)^2=\left(\frac{at^2}{2}\right)^2,$$

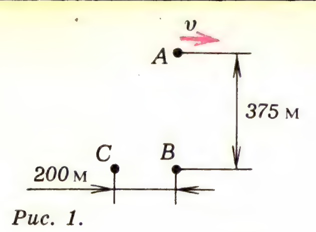


Рис. 1.

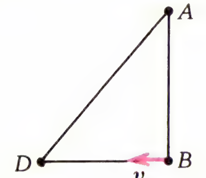


Рис. 2.

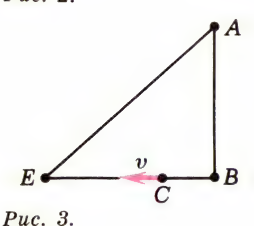


Рис. 3.

где $c=BC$, или

$$t=\sqrt[4]{\frac{4}{a^2}\left(b^2+(vt+c)^2\right)}. \qquad (*)$$

Это уравнение можно решить приближенно, пользуясь методом итерации, суть которого состоит в следующем. Пусть надо решить уравнение вида $f(t)=t$. В качестве приближенного берем какое-нибудь значение $t=t_0$ и составляем последовательность

$$t_1=f(t_0),\ t_2=f(t_1),\ \ldots,\ t_n=f(t_{n-1}).$$

Если эта последовательность имеет предел S и функция $f(t)$ непрерывна в точке S, то S — корень уравнения (*).

В нашем случае при условии $t_0=0$ последовательность будет иметь вид

$$t_1=f(t_0),\ t_2=f(t_1),\ \ldots$$
$$\ldots,\ t_n=\sqrt[4]{\frac{4}{a^2}\left(b^2+(vt_{n-1}+c)^2\right)}.$$

Подставив численные значения, придем к результату

$$t\approx 59{,}2\ \text{с}.$$

При этом, как показывает более детальное изучение последовательности, при $n=4$ достигается точность в один процент, а каждые два дополнительных шага (вычисление двух последующих членов последовательности) улучшают точность в десять раз.

Для случая произвольного расположения точки финиша при итерационном решении уравнения (*), где перед $c=BC$ может быть как знак плюс, так и знак минус, надо соблюдать известную осторожность, связанную с возможной неоднозначностью решения и правильным выбором нулевого приближения итерации.

И еще одно замечание. Движение по параболе с постоянным вектором ускорения потребует, конечно, немалой сноровки от водителя.

А. Н. Коротков, Е. Н. Юносов

Ф1164. *В строительстве используются так называемые предварительно напряженные железобетонные конструкции. Изготовление такой балки происходит следующим образом. Стальной стержень длиной l_1 растягивают до длины l_2, после чего заливают жидким бетоном. После затвердевания бетона стержень освобождают от растяги-*

Пусть длина железобетонной балки после того, как со стального стержня будет снято растягивающее усилие, равна l_0 ($l_1<l_0<l_2$). При этом стержень растянут на величину $\Delta l_1=l_0-l_1$, а затвердевший бетон сжат на величину $\Delta l_2=l_2-l_0$. Согласно закону Гука, для такой деформации стержня необходима сила

$$F_1=E_1S_1\Delta l_1/l_1,$$

где S_1 — площадь его поперечного сечения, E_1 — модуль Юнга стали. Аналогично, для деформации бетона нужна сила

$$F_2=E_2S_2\Delta l_2/l_2,$$

где S_2 и E_2 — площадь поперечного сечения и модуль

вающего усилия. Найти длину образовавшейся железобетонной балки и ее модуль Юнга. Площади сечения стержня и балки и модули Юнга стали и бетона считать известными. Чем предварительно напряженный железобетон лучше простого железобетона?



Юнга бетонного бруска (без стержня). Естественно, что при отсутствии внешних сил сила сжатия бетона уравновешивает силу растяжения стержня:

$$F_1 = F_2.$$

Отсюда, используя предыдущие выражения, найдем искомую длину железобетонной балки

$$l_0 = \frac{E_2S_2 + E_1S_1}{E_1S_1/l_1 + E_2S_2/l_2}.$$

Для определения модуля Юнга E_0 железобетонной балки рассчитаем силу, которая необходима для растяжения балки на величину Δl_0. При такой деформации стержень будет растянут на $\Delta l_1 + \Delta l_0$ (по сравнению с первоначальной длиной l_1), и сила растяжения будет равна

$$F_1' = E_1S_1(\Delta l_0 + \Delta l_1)/l_1.$$

Бетонный брус будет сжат на $\Delta l_2 - \Delta l_0$ (по сравнению со своей первоначальной длиной l_2), и сила его сжатия будет равна

$$F_2' = E_2S_2(\Delta l_2 - \Delta l_0)/l_2.$$

(Если $\Delta l_0 > \Delta l_2$, то F_2' будет силой растяжения, а не сжатия бетона.) Результирующая сила, необходимая для растяжения железобетонной балки, равна

$$F_0 = F_1' - F_2' = E_1S_1(\Delta l_0 + \Delta l_1)/l_1 - E_2S_2(\Delta l_2 - \Delta l_0)/l_2,$$

или, учитывая равенство $E_1S_1\Delta l_1/l_1 = E_2S_2\Delta l_2/l_2$, —

$$F_0 = E_1S_1\Delta l_0/l_1 + E_2S_2\Delta l_0/l_2.$$

Вынесем Δl_0 за скобки, умножим и разделим на S_2/l_0 (считая $S_1 \ll S_2$) и получим

$$F_0 = \left((E_1S_1/l_1 + E_2S_2/l_2)\frac{l_0}{S_2}\right)S_2\frac{\Delta l_0}{l_0}.$$

Нетрудно видеть, что выражение во внешних скобках и есть модуль Юнга железобетонной балки E_0. Использовав формулу для l_0, найдем

$$E_0 = E_2 + \frac{S_1}{S_2}E_1.$$

Интересно отметить, что такой же модуль Юнга будет и у балки, изготовленной без предварительного растяжения стального стержня. Преимущество предварительно напряженного железобетона состоит в том, что бетонное основание в таких конструкциях испытывает деформацию сжатия, даже если сама конструкция в целом испытывает деформацию растяжения. Поскольку прочность бетона при сжатии значительно больше его прочности при растяжении, существенно уменьшается вероятность образования трещин в бетонном основании.

Б. И. Клячин

Ф1165. *Из бесконечной квадратной проводящей сетки с сопротивлением*

Начнем с точек A и B. Перерисуем схему так, как изображено на рисунке 2. Подключим к точкам A и B схемы (рис. 3) два одинаковых источника тока

каждого ребра r удалили часть проводников — так, как показано на рисунке 1. Найти сопротивление между точками A и B, B и C, A и C.

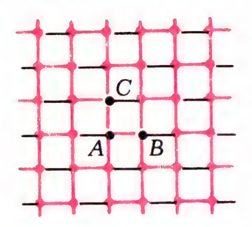


Рис. 1.

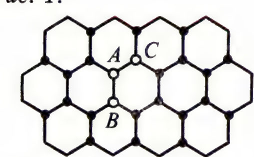


Рис. 2.

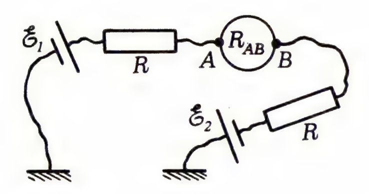


Рис. 3.

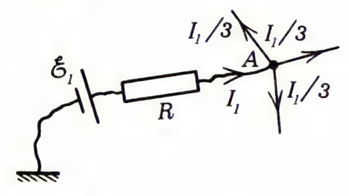


Рис. 4.

Рис. 5.

с ЭДС $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathscr{E}$ через два одинаковых резистора сопротивлением $R \gg r$ (внутренним сопротивлением источников пренебрежем). Положим $r=1$ Ом и подберем значения $\mathscr{E}$ и R так, чтобы $\mathscr{E}/R=1$ А.

Рассмотрим сначала подключение лишь одного источника к точке A и получим следующую схему разветвления втекающего в узел A тока $I_1=\mathscr{E}/(R+r_x)\approx$ ≈ 1 А (здесь r_x — искомое сопротивление между точками A и B) — рисунок 4. Оставляя затем только источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$, получим ситуацию, когда из узла B вытекает ток $I_2=\mathscr{E}/(R+r_x)\approx 1$ А. Этот ток стекается из трех ближайших к B узлов и через источник уходит на «бесконечность» (рис. 5).

Теперь подключим к точкам A и B оба источника. Тогда из принципа суперпозиции и из условия $R \gg r$ получим, что по проводнику AB будет протекать ток $I_{AB}=(I_1+I_2)/3=2/3$ А и напряжение на проводнике будет равно

$$U_{AB}=\frac{2}{3}\text{ А}\cdot 1\text{ Ом}=\frac{2}{3}\text{ В}.$$

С другой стороны, на схему подано общее напряжение $2\mathscr{E}$ и в нее втекает ток $I\approx 2\mathscr{E}/(2R)=1$ А. Следовательно,

$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{2}{3}\text{ Ом}.$$

Случай, когда внешнее напряжение прикладывается к точкам A и C, совершенно аналогичен предыдущему:

$$R_{AC}=\frac{2}{3}\text{ Ом}.$$

Нам осталось найти сопротивление между точками B и C. Подключение только одного источника к точке B дает, что по ребру AB будет течь ток $I_1/3$, а по ребру BC — ток $I_1/6$. Подключение затем к узлу C второго источника, с учетом соображений симметрии и принципа суперпозиции, дает

$$U_{BC}=1\text{ Ом}\left(\frac{1}{3}\text{ А}+\frac{1}{6}\text{ А}\right)+1\text{ Ом}\left(\frac{1}{3}\text{ А}+\frac{1}{6}\text{ А}\right)=1\text{ В}$$

и

$$R_{BC}=\frac{U_{BC}}{I}=1\text{ Ом}.$$

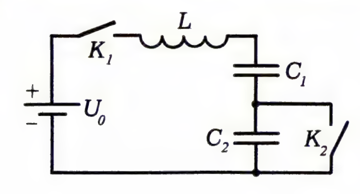
С. С. Кротов

Ф1166. *В схеме, приведенной на рисунке, замыкают ключ K_1 (при замкнутом ключе K_2), а в тот момент, когда заряд на конденсаторе C_1 становится максимальным, ключ K_2 размыкают. Найти максималь-*

После замыкания ключа K_1 происходит зарядка конденсатора C_1, а заряд конденсатора C_2 остается равным нулю, поскольку C_2 закорочен.

В тот момент, когда заряд q_1 конденсатора C_1 становится максимальным, ток в цепи оказывается равным нулю. Найдем величину заряда $q_{1\,max}$, исходя из энергетических соображений: работа источника тока равна энергии электрического поля конденсатора C_1 —

ный заряд конденсатора C_2. Параметры элементов схемы, указанные на рисунке, считать заданными.



$$q_{1\,\max}U_0=\frac{q_{1\,\max}^2}{2C_1},$$

откуда

$$q_{1\,\max}=2C_1U_0.$$

После размыкания ключа K_2 этот заряд оказался «запертым» на закороченных между собой пластинах конденсаторов C_1 и C_2. Пусть через некоторое время после размыкания на конденсаторе C_2 появился заряд q_2. Если предположить, что заряд конденсатора C_1 продолжал расти, то его заряд q_1 будет связан с зарядом q_2 соотношением

$$q_1=q_{1\,\max}+q_2.$$

Для нахождения максимального заряда конденсатора C_2 опять воспользуемся законом сохранения энергии: работа батареи после размыкания ключа K_2 равна приращению энергии конденсаторов —

$$q_{2\,\max}U_0=\frac{(q_{1\,\max}+q_{2\,\max})^2}{2C_1}+\frac{q_{2\,\max}^2}{2C_2}-\frac{q_{1\,\max}^2}{2C_1},$$

откуда

$$q_{2\,\max}=-\frac{2C_1C_2U_0}{C_1+C_2}.$$

Знак «—» означает, что наше предположение относительно роста заряда q_1 не верно, заряд на конденсаторе C_1 будет уменьшаться. При этом на верхней пластине конденсатора C_2 будет «—», а на нижней «+».

В. В. Можаев

Ф1167. *Длинный железнодорожный состав, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом α. Когда состав полностью остановился, на горке находилась половина его длины (см. рисунок). Сколько времени прошло от начала подъема до остановки? Длина состава L, трением пренебречь.*

Пусть масса всего состава M, а длина части состава, въехавшей на горку, x. Тогда масса этой части составляет Mx/L.

Выберем координатную ось X с началом у основания горки и направим ее вверх по горке. Запишем для состава второй закон Ньютона в проекциях на выбранную ось:

$$Ma=-\frac{Mx\,g\sin\alpha}{L},$$

или, учитывая, что $a=x''$,

$$x''=-\frac{g\sin\alpha}{L}x.$$

Это уравнение — не что иное, как уравнение гармонических колебаний с периодом $T=2\pi\sqrt{L/(g\sin\alpha)}$. Время t движения состава до остановки равно четверти периода колебаний, т. е.

$$t=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}.$$

А. И. Буздин

Калейдоскоп „Кванта"



...нельзя наблюдать и определить движения тела, имеющего конечную величину, не определив сначала, какое движение имеет каждая его маленькая частичка или точка.

Л. Эйлер

А так ли хорошо вы знаете,

как движется точка?

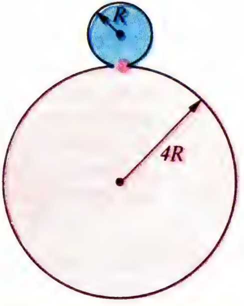


Замечательную возможность изучать самые разнообразные, в том числе и очень сложные, движения предоставляет сведение их к простейшему — движению точки вдоль линии. Но и такое, на первый взгляд, нехитрое движение требует для своего описания введения целого ряда понятий. В этом выпуске «Калейдоскопа» мы будем «работать» с несколькими из них — траекторией, координатой, путем и перемещением. За каждым понятием — долгая история, связанная со становлением законов, которым подчиняются движения тел на Земле и в космосе.

Вопросы и задачи

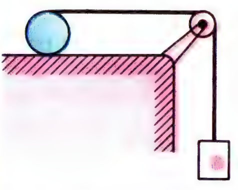
1. Столкнутся ли два шара, если известно, что траектории их центров пересекаются?

2. Круг радиусом R катится по кругу радиусом $4R$. Сколько



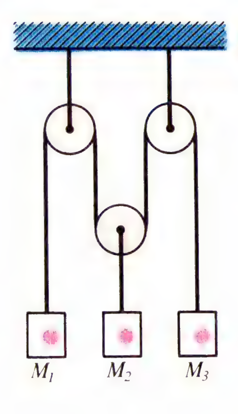
оборотов совершит малый круг по возвращении в первоначальное положение?

3. Нерастяжимая нить намотана на цилиндр, а другим концом привязана к грузу. Какой путь пройдет груз,



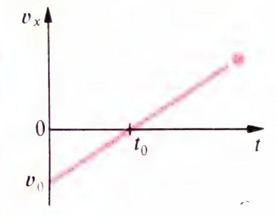
когда катящийся без скольжения цилиндр, длина окружности которого равна l, сделает один оборот?

4. К нерастяжимой нити, перекинутой через блоки, привязаны грузы, как показано



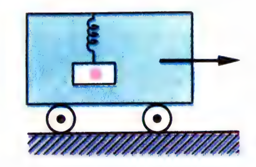
на рисунке. Найдите направление и модуль вектора перемещения груза M_2, если груз M_1 переместился на 5 см вверх, а груз M_3 — на 3 см вниз.

5. Тело движется прямолинейно, выйдя из точки с координатой x_0, причем проекция его скорости на ось X меняется так, как показано на графике.



Как будут выглядеть для этого тела графики зависимости координаты x, проекции S_x перемещения и пути от времени?

6. Какова (относительно Земли) траектория колеблющегося



на пружинке грузика, помещенного в равномерно движущийся вагон?

7. По какой траектории движется частица в бегущей продольной волне?

8. Мальчик бросает мячи из вагона в сторону, противоположную движению поезда. Как будут двигаться мячи по отношению а) к вагону? б) к полотну дороги?

9. По какой траектории станет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное электрическое поле под углом к силовым линиям?

10. Существуют ли такие точки движущегося вагона, которые

и

$$\omega = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\sin\alpha\right).$$

Надеюсь, что теорема о трех синусах окажется полезной вам при подготовке к вступительным экзаменам. В заключение — еще несколько задач.

1. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника наклонен к плоскости α, проходящей через гипотенузу, под углом 30°. Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью треугольника равен 45°.

2. Сторона AB ромба $ABCD$ с тупым углом 120° лежит в некоторой плоскости τ, составляющей с плоскостью ромба угол 45°. Площадь ромба равна $72-\sqrt{3}$ см^2. Определите расстояние от стороны CD до плоскости τ и угол, которой составляет бо́льшая диагональ ромба с этой же плоскостью.

3. Прямая AB параллельна плоскости τ. Прямая CD пересекает прямую AB под углом α и образует с плоскостью τ угол φ. Определите угол между плоскостью τ и плоскостью, в которой лежат прямые AB и CD.

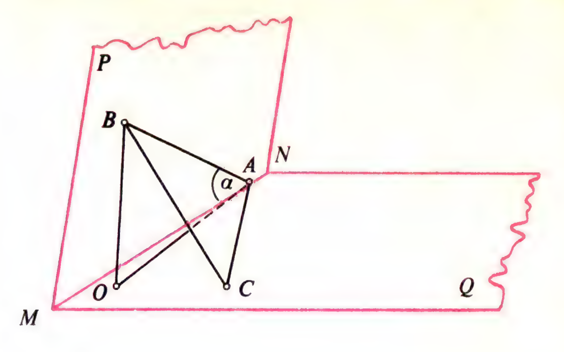


Рис. 4.

4. В прямоугольном треугольнике через биссектрису прямого угла проведена плоскость, которая составляет с плоскостью треугольника угол α. Какие углы эта плоскость составляет с катетами треугольника?

5. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a и образует с боковой гранью угол α.

Олимпиады

Задачи LII Московской математической олимпиады

7 класс

1. Квадрат расчерчен на 16 равных клеток. Каждую из букв A, B, C, D расставьте в этих клетках по четыре раза таким образом, чтобы на любой горизонтали, любой вертикали и двух больших диагоналях не было одинаковых букв.

2. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно заданной прямой.

3. В темной комнате на полке в беспорядке лежат 4 пары носков двух разных размеров и двух разных цветов. Какое наименьшее число носков необходимо, не выходя из комнаты, переложить с полки в чемодан, чтобы в нем оказались две пары различного размера и цвета?

4. Турист выехал из турбазы на байдарке в 10 часов 15 минут с обязательством вернуться обратно не позднее 13 часов того же дня. Известно, что скорость реки 1,4 км/ч, скорость байдарки в стоячей воде 3 км/ч. На какое максимальное расстояние турист сможет отъехать от турбазы, если через каждые 30 минут гребли он 15 минут отдыхает, не причаливая к берегу, и может повернуть назад только после отдыха?

5. Найдите все натуральные числа x, удовлетворяющие условиям: произведение цифр числа x равно $44\cdot x-86868$, а сумма цифр является кубом натурального числа.

8 класс

1. Решите уравнение

$$(x^2+x)^2+\sqrt{x^2-1}=0.$$

2. Часть клеток бесконечной клетчатой бумаги покрашена в красный цвет, остальные — в белый (не обязательно в шахматном порядке). По красным клеткам прыгает кузнечик, по белым — блоха, причем каждый прыжок может быть сделан на любое расстояние по вертикали или горизонтали. Докажите, что кузнечик и блоха могут оказаться рядом, сделав в общей сложности (в сумме) не более трех прыжков.

3. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте перпендикуляр к данной прямой, проходящей через данную точку а) вне этой прямой; б) на ней.

4. Подмножество X множества «двузначных» чисел 00, 01, ..., 98, 99 таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X?

5. Докажите, что пионерский отряд всегда можно разбить на две команды так, чтобы общее число пар друзей, оказавшихся в одной и той же команде, было меньше числа пар друзей, оказавшихся в разных командах.

6. Все значения квадратного трехчлена ax^2+bx+c на отрезке $[0,1]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|a|+|b|+|c|$?

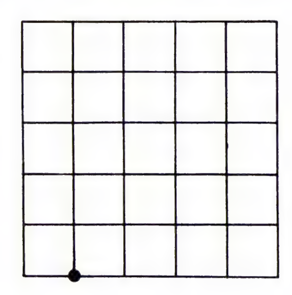
9 класс

1. В пространстве имеются четыре различные прямые, окрашенные в два цвета: две красные и две синие, причем любая красная прямая перпендикулярна любой синей прямой. Докажите, что либо красные, либо синие прямые параллельны.

2. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC взяты соответственно точки M, K и L так, что прямая MK параллельна прямой AC и ML параллельна BC. При этом отрезок BL пересекает отрезок MK в точке P, а AK пересекает ML в точке Q. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны.

3. Известно, что числа A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... образуют геометрические прогрессии. Можно ли, зная лишь значения A_1+B_1, A_2+B_2, A_3+B_3 и A_4+B_4, определить A_5+B_5?

4. Улицы некоторого города на плане представляются в виде квадрата, расчерченного на 25 равных клеток со стороной 1. В отмеченной на рисунке точке находится снегоуборочная машина. Найдите длину кратчайшего маршрута объезда всех улиц, чтобы в конце работы машина вернулась в исходную точку.



5. Найдите все положительные числа A_1, A_2, ..., A_{10}, удовлетворяющие при всех $k=1$, 2, ..., 10 условию $(A_1+...+A_k)(A_k+...+A_{10})=1$.

10 класс

1. Решите уравнение

$$\lg(x-2)=2x-x^2+5.$$

2. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

3. Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

4. Даны n различных натуральных чисел. Докажите, что некоторая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой не больше ее разности, содержит ровно 3 или 4 данных числа, если а) $n=5$, b) $n=1989$.

5. Вычислите с точностью до 2 наименьшую суммарную длину разрезов, которые необходимо сделать, чтобы перекроить единичный квадрат в прямоугольник с диагональю, равной 100.

6. На ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырех проведенных плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость также его касается.

Публикацию подготовили
И. Н. Сергеев, С. Б. Гашков

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

8 класс

1. С ледяной горки с углом α без начальной скорости съезжают санки. Средняя треть длины горки посыпана песком и имеет коэффициент трения μ. При каких значениях μ санки доедут до конца горки? Чистый лед считать абсолютно гладким.

2. По шоссе в один ряд с одинаковыми интервалами и скоростями движутся большие грузовики. В каком месте у пешехода больше времени на переход шоссе: у перекрестка, где скорость грузовиков мала (хотя все равно гораздо больше, чем у пешехода), или вдали от него, где скорость в несколько раз выше? Светофора нет!

3. Шарик массой m под действием силы тяжести падает в жидкости с постоянной скоростью v. Сила сопротивления жидкости движению шарика пропорциональна квадрату скорости. К шарику дополнительно прикладывается горизонтально направленная сила f. Какой станет вертикальная составляющая скорости шарика?

4. Муха, пролетая параллельно поверхности стола со скоростью v на высоте H, заметила в некоторый момент времени точно под собой каплю меда. При помощи крыльев муха может развивать в любом направлении ускорение, не превышающее a. За какое минимальное время муха сможет долететь до капли меда? Сила тяжести отсутствует (допустим, дело происходит в космосе).

9 класс

1. Человек стоит у стены так, что его спина и пятки касаются этой стены. Может ли он, не теряя равновесия, наклониться, чтобы завязать шнурок на ботинке, не отрывая подошв от пола?

2. На дне океана с исследовательскими целями произведен подводный взрыв. Гидрофон (приемник звука), установленный на дне на некотором расстоянии от места взрыва,

зарегистрировал последовательность из нескольких звуковых сигналов. Промежуток времени между первым и вторым сигналами составил $t_1=1$ с, между первым и третьим — $t_2=3$ с. На каком расстоянии от гидрофона произошел взрыв?

3. На горизонтальную поверхность льда при температуре $t_1=0$ °С кладут однокопеечную монету, нагретую до температуры $t_2=50$ °С. Монета проплавляет лед и опускается в образовавшуюся лунку. Погрузится ли она в лед на всю свою толщину? Удельная теплоемкость материала монеты $c_м=380$ Дж/(кг · К), плотность его $\rho_м=8,9$ г/см^3, удельная теплота плавления льда $\lambda=3,3\times10^5$ Дж/кг, плотность льда $\rho_0=0,9$ г/см^3.

4. На поверхность термостата одновременно ставят рядом два однородных куба, сделанных из одинакового материала и находящихся при одинаковой температуре t_0, отличной от температуры термостата t_1. Длина ребра у одного из кубов в два раза больше, чем у другого. Через время τ температура в центре малого куба стала t_2. Через какое время (от начального момента) такая же температура будет в центре большого куба? Потерями тепла пренебречь.

5. В герметическом цилиндре длиной $l=1$ м и сечением $S=10$ см^2 находится тонкий поршень массой $M=200$ г, который может перемещаться вдоль цилиндра без трения. Первоначально ось цилиндра горизонтальна, а поршень находится посередине цилиндра. По обе стороны от поршня вводят одинаковое количество $m=0,4$ г воды и ее паров при атмосферном давлении. Затем цилиндр переводят в вертикальное положение. На сколько при этом смещается поршень, если во всем цилиндре поддерживается температура $t=100$ °С? Как изменится ответ, если $m=0,8$ г?

6. Оцените массу спирали электрической лампочки мощностью $P=100$ Вт, включенной в сеть переменного тока с частотой $f=50$ Гц, если известно, что температура спирали колеблется от $T_1=2500$ К до $T_2=2800$ К с частотой 100 Гц. Удельная теплоемкость вольфрама $c=132$ Дж/(кг · К).

7. Плоская металлическая шайба массой m и площадью S может свободно перемещаться между обкладками плоского конденсатора, оставаясь параллельной им. Сила тяжести отсутствует. В начальный момент времени шайба касается одной из обкладок. К конденсатору подключают источник постоянного напряжения U. Найдите зависимость тока в цепи от времени, если расстояние между обкладками конденсатора d. Удары шайбы об обкладки считать неупругими.

10 класс

1. В банке *1* находится 0,5 л горячей воды, а в банке *2* — 1 л холодной воды. Сначала некоторый объем воды из банки *1* переливают в банку *2*, и содержимое перемешивают. Затем такой же объем воды из банки *2* переливают в банку *1* и тоже перемешивают. В результате температура воды в банке *1* уменьшилась на 2 °С. Как изменилась температура воды в банке *2*? Теплоемкостью банок и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

2. На горизонтальную пластину насыпано немного мелкого песка. Пластина совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с частотой $f=1000$ Гц. При этом песчинки подпрыгивают на высоту $h=5$ мм относительно среднего положения пластины. Считая удары песчинок о пластину абсолютно неупругими, найдите амплитуду колебаний пластины.

3. Вы смотрите с расстояния $L=2$ м на свое отражение в елочном шарике диаметром $d=10$ см. На каком расстоянии от вас должен стоять ваш двойник, чтобы вы видели его таким же маленьким, как ваше отражение в шарике?

4. В одном из проектов «системы противоракетной обороны с элементами космического базирования» предлагается вывести на околоземную орбиту химический лазер, создающий инфракрасный луч мощностью $P=25\,000$ кВт. Один фотон (квант) такого излучения имеет энергию $E_0=7,5\cdot10^{-20}$ Дж и импульс $p_0=2,5\cdot10^{-28}$ кг · м/с. Найдите силу отдачи, действующую на такой лазер при его работе.

Публикацию подготовили
А. И. Буздин, С. С. Кротов

Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся в этом году на заключительном туре институтской физической олимпиады для старшеклассников.

1. На поршень шприца, расположенного горизонтально, давят с силой F. Сколько воды выходит из шприца в 1 секунду, если диаметр поршня D? Трением можно пренебречь.

2. Металлический шар радиусом R несет заряд Q. Шар покрыт слоем однородного диэлектрика толщиной L. Диэлектрическая проницаемость слоя ε. Определите работу перемещения точечного заряда q от поверхности шара в точку, находящуюся в вакууме на расстоянии $r>R+L$.

3. В вогнутое зеркало, имеющее форму полусферы радиусом $R=110$ см, налит тонкий слой прозрачной жидкости. Найдите показатель преломления жидкости, если известно, что при некотором положении точечного источника света данная оптическая система дает два действительных изображения, одно из которых совпадает с самим источником, а другое отстоит от него на $l=60$ см.

4. Груз массой m падает с высоты H на чашу массой M, подвешенную на пружине, жест-

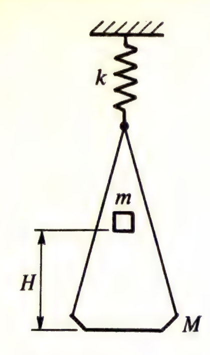


Рис. 1.

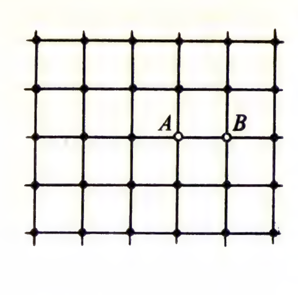


Рис. 2.

кость которой k (рис. 1). Определите амплитуду колебаний, полагая удар абсолютно неупругим (массой пружины пренебречь).

5. Температура поверхностного слоя Солнца $T \approx 6000$ К. Почему с поверхности Солнца не улетают атомы водорода (масса Солнца $M \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус Солнца $R \approx 7 \cdot 10^{8}$ м)?

6. Определите работу по переносу тела массой m в отсутствие сил сопротивления с одной планеты на другую. Массы и радиусы планет известны. (Скорость переноса считать постоянной и значительно меньшей скорости света.)

7. Дана бесконечная плоская проводящая сеть с квадратными ячейками (рис. 2). Сопротивление каждого прямого проводника, соединяющего два ближайших узла сети, равно R. Определите сопротивление между точками A и B.

8. Используя классические формулы для кинетической и потенциальной энергии электронно-протонной системы и квантовый постулат Бора, получите выражение для энергии уровней в атоме водорода.

9. В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n, проделано небольшое отверстие радиусом r. По оси отверстия из сосуда выходит горизонтальный луч света. До какого уровня над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч вышел из струи, ни разу не испытав полного отражения?

Публикацию подготовили
А. Я. Николаич,
В. А. Опарин,
В. Н. Романов

Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана проводит в 1989/90 учебном году вторую Всесоюзную заочную физико-математическую олимпиаду (с техническим приложением) для учащихся средних школ, ПТУ и техникумов.

Олимпиада проводится в два тура. Условия задач первого тура публикуются ниже. Условия задач второго тура будут рассылаться участникам олимпиады, допущенным ко второму туру по результатам первого.

Решение задач первого тура необходимо выслать *до 15 декабря 1989 года.* Все решения оформите в одной школьной тетради. На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги с указанием подробного домашнего адреса (с почтовым индексом), фамилии, имени, отчества и места учебы. На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса.

Тетрадь с решениями положите в большой конверт и отправьте простой бандеролью по адресу: *107005 Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, «Олимпиада-89/90».*

Задачи первого тура

1. Сколько корней на отрезке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ имеет уравнение

$$4\sqrt{2}\ |x|(x^2-1)(2x^4-4x^2+1)=1?$$

2. Сравните 99! и 50^{99}.

3. Ребро основания правильной четырехугольной призмы $2a$, а высота $a(1+\sqrt{3})$. Проведена сфера, проходящая через все вершины нижнего основания призмы и касающаяся его верхнего основания. Найдите площадь части поверхности призмы, находящейся внутри сферы.

4. Летательный аппарат с оптическим устройством на борту движется равномерно над поверхностью земли на высоте 800 м, вращаясь вокруг продольной оси со скоростью 360 об/мин. Оптическое устройство автоматически делает снимок каждый раз в тот момент, когда его объектив занимает наинизшее положение. Определите угол съемки, необходимый для того, чтобы при фотографировании не перекрывались соседние кадры.

5. Одноатомный газ находится в вертикально расположенном цилиндре под поршнем, способным без трения перемещаться в вертикальном направлении. Площадь поперечного сечения цилиндра S, объем V. Цилиндр через маленькое отверстие соединяют с теплоизолированной емкостью объемом V, газ в которой отсутствует. На каком уровне остановится поршень после завершения процесса перетекания газа?

6. Двое несут тяжелое бревно. Третий становится впереди первого и пытается помочь. Будет ли несущим легче?

Олимпиады по информатике в Киргизии

История олимпиад по информатике в г. Фрунзе начинается с 1985 года, когда была проведена первая такая олимпиада. С 1987 года проводятся республиканские олимпиады.

Олимпиады проходят по группам: I — 6—9 классы, II — 10 класс, а также ПТУ с теоретическим (Т) и компьютерным (К) турами. Несколько задач предыдущих лет опубликованы в журнале «Информатика и образование», 1987, № 6 (с. 97—98). Здесь приводится ряд задач олимпиад различных уровней последних лет (З — зональная, Ф — городская, Р — республиканская).

1 (Ф — 88, II, Т). Заданы три тройки натуральных чисел $K1 \geqslant M1 \geqslant T1$, $K2 \geqslant M2 \geqslant T2$, $K3 \geqslant M3 \geqslant T3$, каждая из которых определяет прямоугольный параллелепипед. Написать алгоритм, который определяет, можно ли составить из этих параллелепипедов куб.

2 (Р — 88, I, Т). Алгоритм обрабатывает некоторые сочетания букв В, П, М. Алгоритм переводит слово ПВПВМВ в слово ПВ, МВМВПВМВ в МВМВ, МВПВПВМВПВ в ПВ, ПВПВ в ПВПВ, МВПВПВПВ в ПВПВ.

Для некоторых слов, например ППВ, МВМП, ВВ, ПВПМПВ, алгоритм дает сообщение «ошибка».

а) Опишите такой алгоритм.

б) Какой смысл можно придать такому алгоритму?

3 (Р — 88, ПТУ, Т). Ацетиленовый резак установлен в правом верхнем углу металлического листа размером 100×100 см. Резак сдвигается на А см вниз, В см влево и С см вниз. На сколько частей будет разрезан лист и как они будут выглядеть?

4 (З — 89, I, Т). а) Что делает алгоритм, реализованный приведенной ниже программой на языке Бейсик? б) Как можно его упростить? А, В, С — целые числа.

```
10 INPUT B
20 A=1
32 IF B>A+8 THEN 60
35 C=B—1
40 IF C<A+7 THEN 60
55 PRINT A, B, C, B
56 STOP
60 PRINT «ЖОК»
75 STOP: END
```

5 (Ф — 89, II, К). Будем называть два числа *близкими*, если их разность меньше 10. Написать и отладить программу, которая запрашивает ввод числа до тех пор, пока все уже введенные числа близки друг к другу (разность между любыми двумя из них меньше 10).

6 (Р — 89, I, Т). Посередине клетчатого листа бумаги нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная линия, звенья которой идут по сторонам клеток. Муравей находится в середине одной из клеток. Муравей может переходить на одну из четырех соседних клеток, отмечать клетки, где он уже был. Муравей видит, пересек ли он линию и вышел ли он на край листа.

Написать алгоритм, который определяет, где находился сначала муравей: внутри области, ограниченной линией, или снаружи нее.

7 (Р — 89, I—II, Т). Киргизский алфавит отличается от русского добавлением букв Н (носовое Н), θ, Y (смягченные О, У).

В следующих словах буква Л читается твердо:

КОЛ, АЛА, БЫЛТЫР, БУЛ, БАЛЫК, ОЙЛО, АМАЛКθЙ, БОЕЛГОН, ПАЛОО, КУЛУН, УЛАН, АЙЫЛ, МАЛ, КОЮЛГАН.

В следующих словах буква Л читается мягко (как в русских словах соль, люк):

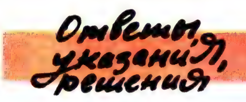
БИЛИМ, КθЛ, МУГАЛИМ, ЭЛ, КЕЛ, БθЛ, ЭЛИК, БЕЛЕК, ЭЛYY, ГYЛ, СЕЛКИНЧЕК, ГYЛЖАН.

Написать алгоритм, который по заданному киргизскому слову, содержащему одну букву Л, определяет, твердо или мягко читается эта буква.

8 (Р — 89, I, Т). а) Что делает алгоритм, реализованный следующей программой на языке Бейсик? Какой смысл можно придать этому алгоритму? б) Как можно его упростить?

```
10 X=0:Y=3
20 IF X*X—3*X<=0 THEN PRINT X, Y
30 IF X*X—3*X<0 THEN 56
40 Y=Y—1
50 IF Y>=0 THEN 20
56 X=X+1:Y=X:GOTO 20
```

Г. М. Кененбаева, П. С. Панков



Муравей на консервной банке

Длина пути $ACDB$ равна длине пути $AC'D\,B$ — см. рис. 1. А этот путь длиннее, чем путь $AC'B$. Так что наш ответ правильный.

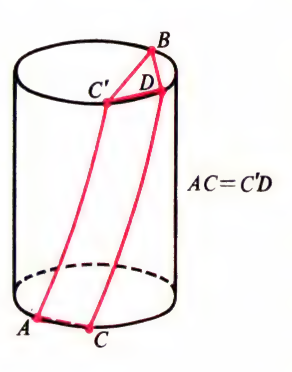


Рис. 1.

Орбиты

4. Сравнивая орбиты кометы и Земли с помощью III закона Кеплера, найдем большую полуось кометной орбиты: $a=18{,}05$ а. е. Максимальное удаление от Солнца — около 35,5 а. е.

6. Посмотрим на рис. 2. За время прохождения дальней половины орбиты комета заметает площадь фигуры $CBAB'$. Площадь этой фигуры — $\pi ab/2+b(a-r_п)$. За интересующее нас время заметаются остатки от площади πab. Расчет дает 14,7 года.

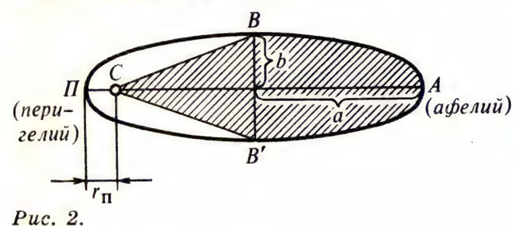


Рис. 2.

Теорема о трех синусах

2. $3\sqrt{6}$ см; $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $\arcsin\left(\dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)$.

4. $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$.

5. $$\frac{a^3\sin\alpha}{24\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}}$$

Ответы к тесту
(см. с. 67)

1. 4.
2. ЧАЙ.
3. ЧЕМОДАН.
4. 11.
5. ЖАБА.
6. 21. (Сложите все цифры, стоящие вне скобок.)
7. 3. (Каждое число получается, если к предыдущему прибавить 2 и результат разделить на 2: $4+2=6$; $6:2=3$.)
8. ТЕСТО.
9. 6.
10. И.
11. ШОК.
12. 54.
13. 5.
14. 11. (В каждом ряду третье число есть сумма половины первого числа с удвоенным вторым.)
15. 27. (Число в скобках есть разность между числами вне скобок.)
16. С и Е. (Слово СОМНЕНИЕ.)
17. 18. (Возведите в квадрат числа 2, 3, 4, 5 соответственно, каждый раз прибавляя по 2.)
18. 76. (Удвоенная сумма чисел, стоящих вне скобок.)
19. КОЖА.
20. ЛАД.
21. СКУНС.
22. КИСТЬ.
23. С. (Ряды построены из букв русского алфавита, соответственно через 2, 3, и 4 буквы.)
24. 2. 25. ГРОТ. 26. ВИНТ. 27. 2.
28. 64. (Возведите в куб числа 1, 2, 3 и 4 соответственно.)
29. Е и Е. (Слово ЕДИНЕНИЕ.)
30. ПОРТ. 31. ВТОРНИК. 32. Буква Ж и цифра 7.
33. 1.
34. 1. (Шипы, направленные наружу, считаются за $+1$; шипы, направленные внутрь,— за -1. В каждом горизонтальном ряду последняя фигура рассматривается как сумма двух предыдущих фигур: $4-2=2$, $-1+5=4$, $2+2=4$.)
35. 1. 36. 6. 37. 2. 38. ГУБА. 39. 1. 40. РОСА.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. 14 и 90. Решение. Пусть $\overline{ab}=10a+b$ — интересующий нас номер. По условию $(a+b)+(a-b)^2=10a+b$, т. е. $(a-b)^2=9a$. Отсюда a — полный квадрат, т. е. $a=1$, $a=4$ или $a=9$. Перебрав эти возможности, находим, что $a=1$ (тогда $b=4$) и $a=9$ (тогда $b=0$).

2. $(1+9+6+8+3)^3=19\,683$.

3. Нельзя. Доказательство. Расположим на плоскости один вырезанный треугольник внутри другого и опишем вокруг обоих треугольников окружности. Меньший треугольник лежит внутри обеих окружностей: в одну он вписан сам, а в другую вписан треугольник, внутри которого он расположен. Значит, вершины меньшего треугольника лежат на дуге одной окружности, расположенной внутри другой окружности (рис. 3). Поскольку окружности одинаковые, эта дуга меньше 180°. Мы видим, что один из углов меньшего треугольника опирается на дугу окружности, большую 180°. Значит, этот угол тупой. Противоречие.

4. См. рис. 4.

5. 505; 500 050; $n(n^2+1)/2$. Решение. Чтобы решить эту задачу, достаточно знать, что сумма $1+2+\ldots+n$ равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$. В самом деле, последнее число в $(n-1)$-й строчке нашего «треугольника» равно $\dfrac{(n-1)n}{2}$, а последнее

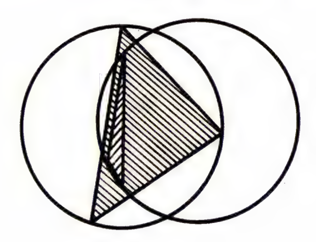


Рис. 3.

29 + 36 = 65

Рис. 4.

число в n-й строчке равно $\frac{n(n+1)}{2}$. Значит, сумма чисел в первых $n-1$ строчках равна

$$1+2+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right),$$

сумма чисел в первых n строчках равна

$$1+2+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right).$$

Сумма же чисел в n-й строчке равна разности второй и первой сумм, т. е.

$$\frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 8)

Вопросы и задачи

1. Однозначного ответа нет, если неизвестны размеры шаров и время их прихода к точке пересечения траекторий.
2. Пять.
3. $2l$.
4. Вектор перемещения направлен вниз, его модуль равен 1 см.
5. См. рис. 5.
6. Синусоида или косинусоида.
7. По отрезку прямой, лежащему на линии, совпадающей с направлением распространения волны.

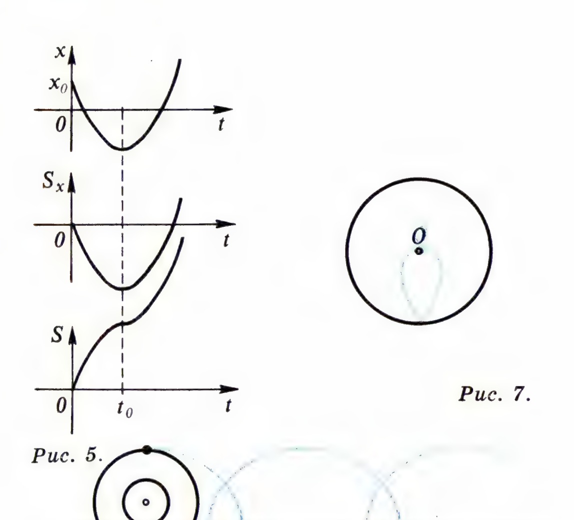


Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 7.

8. а) По параболам; б) если скорость мяча относительно вагона равна по модулю скорости поезда относительно земли, то по вертикали; в остальных случаях — по параболам.

9. По параболе.
10. Такие точки есть на реборде колеса. Траектория одной из этих точек изображена на рис. 6. Она называется циклоидой.
11. См. рис. 7.
12. Осколки окажутся на поверхности раздувающейся со скоростью v_0 сферы, центр которой опускается с ускорением g. При этом каждый осколок движется по своей параболе.

Микроопыт

а) по дуге окружности, лежащей в вертикальной плоскости;
б) по горизонтальной окружности (конический маятник).

АНКЕТА 9-89

Дорогой читатель!

Третий раз мы помещаем нашу ежеквартальную анкету. Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 9—89».
Очень надеемся на обратную связь.
Благодарим всех читателей, приславших ответы на анкеты «3—89» и «6—89».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______

Ваша профессия (если Вы работаете): ______

круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______



АНКЕТА 9-89

3. Какие статьи и задачи из номеров 7—9 (номер укажите) Вам понравились? ____

Вы использовали при подготовке к уроку? ____

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ____

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? ____

5. Вам больше всего понравилась обложка номера ____

иллюстрация из номера ____, страница ____

6. Ваши общие замечания и пожелания: ____

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин, И. Е. Смирнова,
Л. А. Тишков, П. И. Чернуский, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор О. М. Березина

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

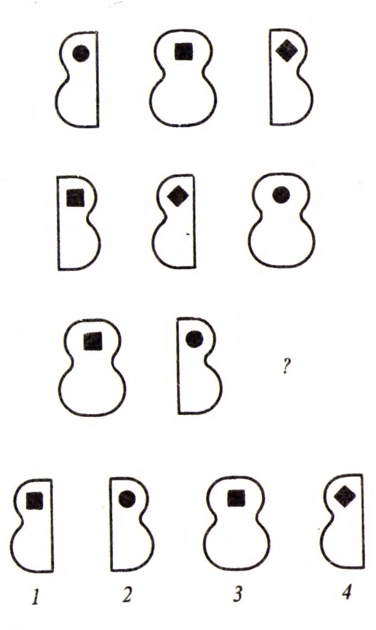
Сдано в набор 26.6.89. Подписано к печати 18.8.89. Т-15828
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,5
Усл. кр.-отт. 27,30. Уч.-изд. л. 7,62. Тираж 184040 экз.
Заказ 1438. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Проверьте свои способности

Так называется вышедшая в 1970 году книга английского психолога Г. Айзенка, содержащая множество психологических тестов. Можно спорить о том, выявляют ли тесты Айзенка способности человека. Но бесспорно, что большинство читателей с удовольствием откликнутся на призыв, содержащийся в названии книги. Мы публикуем один тест Айзенка. На его выполнение дается 30 минут. Точки обозначают количество букв в пропущенном слове. Русский алфавит используется без буквы «ё». Желаем успеха!

1. Выберите нужную фигуру из четырех пронумерованных.



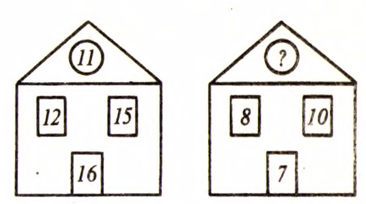
2. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

ОБЫ (...) КА

3. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

ААЛТЕРК
КОЖАЛ
ДМОНЧЕА
ШКААЧ

4. Вставьте недостающее число.



5. Вставьте пропущенное слово.

БАГОР (РОСА) ТЕСАК
ГАРАЖ (....) ТАБАК

6. Вставьте пропущенное число.

196 (25) 324
325 ( ) 137

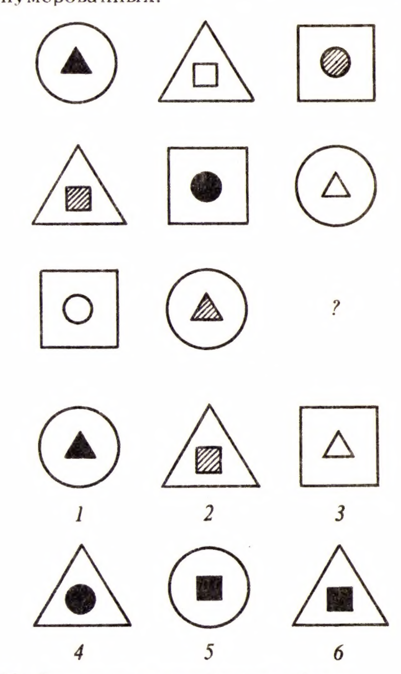
7. Продолжите ряд чисел.

18 10 6 4 ?

8. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

НИАВД
СЕОТТ
СЛОТ
ЛЕКСОР

9. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



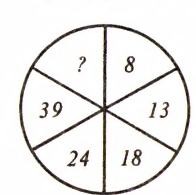
10. Вставьте недостающую букву.

Щ Ц Т П Л ?

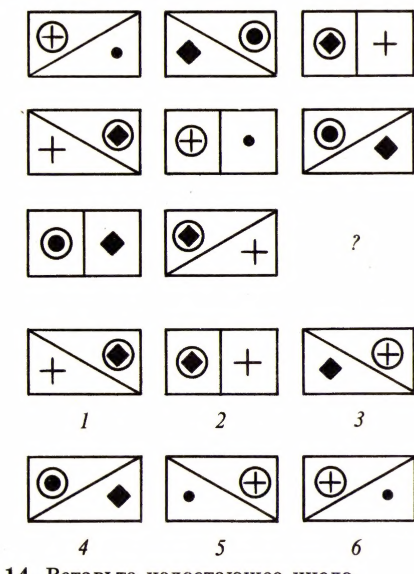
11. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

МЕ (...) ОЛАД

12. Вставьте пропущенное число.



13. Выберете нужную фигурку из шести пронумерованных.



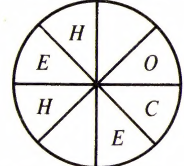
14. Вставьте недостающее число.

4 9 20
8 5 14
10 3 ?

15. Вставьте недостающее число.

16 (27) 43
29 ( ) 56

16. Вставьте недостающие буквы.



17. Вставьте пропущенное число.

6 11 ? 27

18. Вставьте пропущенное число.

12 (56) 16
17 ( ) 21

19. Вставьте пропущенное слово.

ФЛЯГА (АЛЬТ) ЖЕСТЬ
КОСЯК (....) МИРАЖ

20. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

ПРИК (...) ЬЯ

21. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

ЖААРБ
ТЯХА
НУССК
КОДАЛ

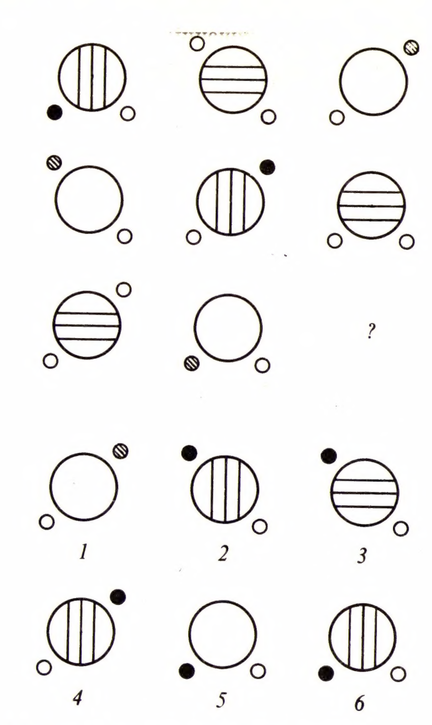
22. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.

РУКА (.....) ГРОЗДЬ

23. Вставьте пропущенную букву.

А Г Ж
Г З Л
З М ?

24. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.



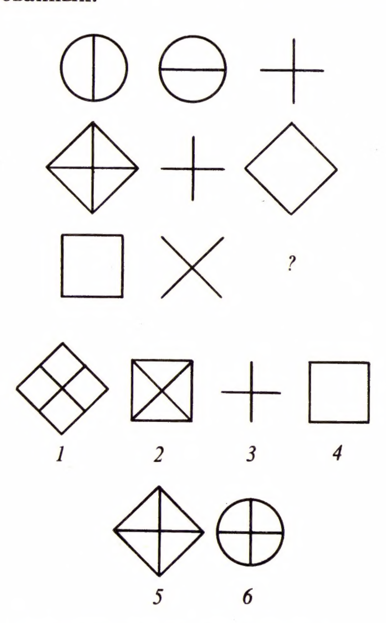
25. Вставьте пропущенное слово.

КНИГА (АИСТ) САЛАТ
ПОРОГ (....) ОМЛЕТ

26. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.

КАРТОЧНАЯ ИГРА (....) СТЕРЖЕНЬ С РЕЗЬБОЙ

27. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



28. Вставьте пропущенное число.

1 8 27 ?

29. Вставьте пропущенные буквы.



30. Вставьте пропущенное слово.

ЛОТОК (КЛАД) ЛОДКА
ОЛИМП (....) КАТЕР

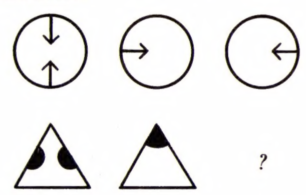
31. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

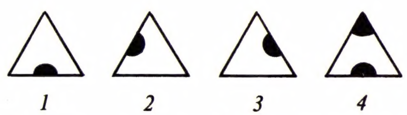
АТСЕН
ТИВОНКР
РАКЫШ
КООН

32. Вставьте пропущенную букву и пропущенное число.

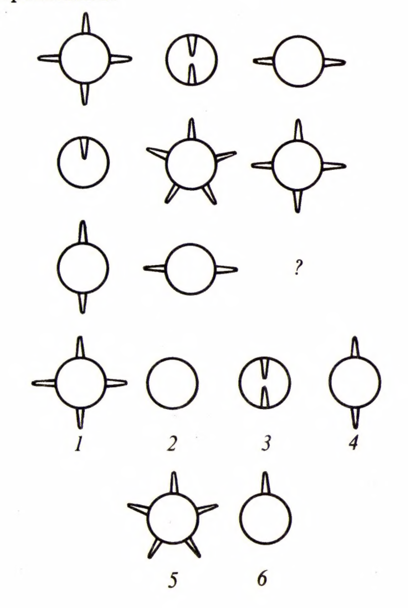
1 В 5 ?
А 3 Д ?

33. Выберите нужную фигуру из четырех пронумерованных.

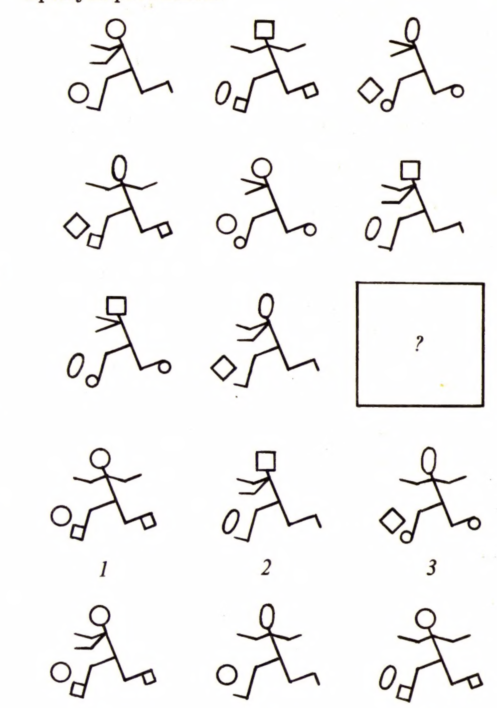




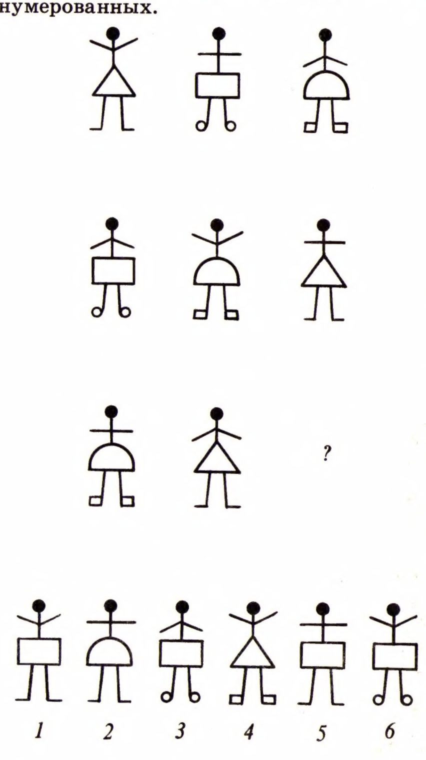
34. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



35. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.

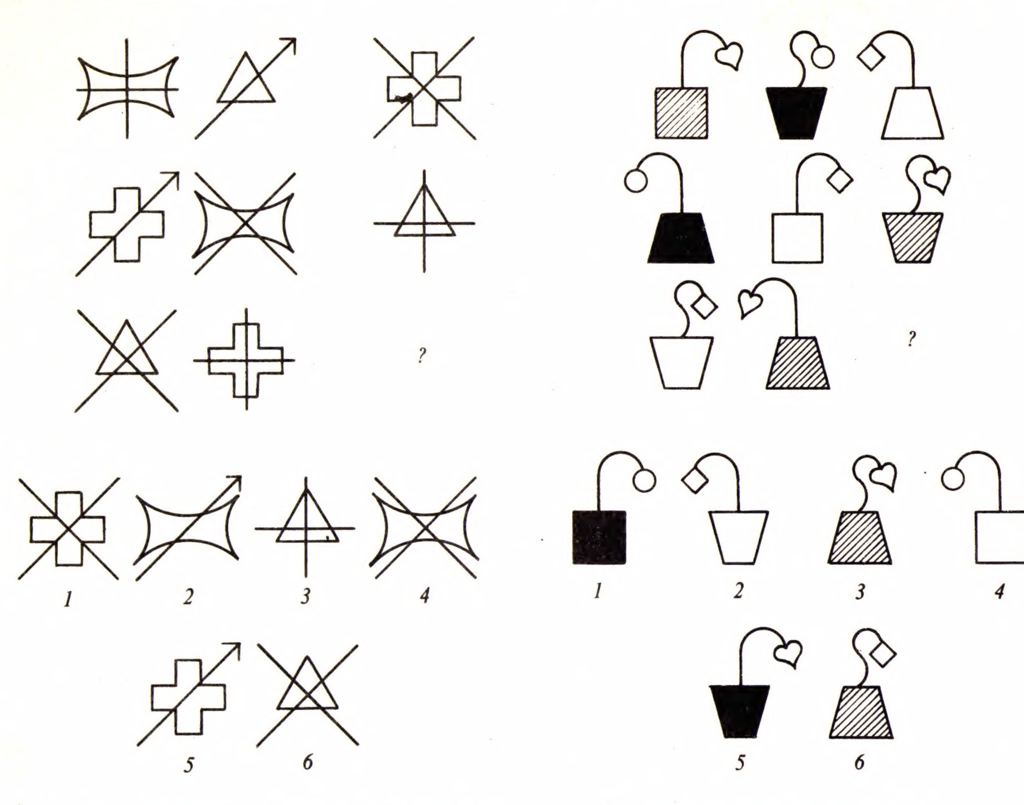


36. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.



37. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.

39. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



38. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.

ЗАЛИВ (....) ЧАСТЬ ЛИЦА

40. Вставьте пропущенное слово.

ПИРОГ (ПОЛЕ) СЛЕЗА
РЫНОК (....) ОСАДА

Вариации на тему Евклида

(Начало см. на с. 51)

2, т. е. символами 0 и 1; с этими символами можно производить арифметические операции, например: $0+1=1$, $1+1=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 1=1$. Многочленов данной степени с такими коэффициентами — уже конечное число. Например, многочленов первой степени всего два: x и $x+1$; второй степени — четыре: x^2, x^2+x, x^2+1 и x^2+x+1, и т. д.

Рассуждение Евклида показывает, что неприводимых многочленов, коэффициенты которых — вычеты по модулю два, бесконечно много. В силу конечности числа многочленов данной степени, существуют неприводимые многочлены и сколь угодно высокой степени. Возьмем такой многочлен $p(x)$. *Он будет неприводимым и как многочлен с целыми коэффициентами.* Действительно, если $p(x)=q(x)\cdot r(x)$, то, заменяя коэффициенты многочленов $q(x)$ и $r(x)$ на их вычеты по модулю 2 (т. е. четные числа — на 0, а нечетные — на 1), мы получим разложение на множители $p(x)$ как многочлена, коэффициенты которого — вычеты по модулю 2. А это невозможно по предположению.

Итак, мы доказали, что степени неприводимых многочленов могут быть сколь угодно велики. В качестве упражнения «на тему Евклида» докажите, что если $p_1, \ldots, p_n$ — простые числа, а $i_1, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка их номеров, то среди делителей числа $E=p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}-p_{i_{k+1}}\ldots p_{i_n}$ найдутся новые простые числа. Например, $7=2\cdot 5-3$, $11=7\cdot 3-2\cdot 5$, $13=5\cdot 11-2\cdot 3\cdot 7$, $17=2\cdot 7\cdot 13-3\cdot 5\cdot 11$. Может быть, каждое следующее простое число тоже можно представить в таком виде?

В. Г. Ильичев